
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01025946 3



ZARYS

TEORYI MNOGOŚCI.

BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,
wydawana przez
A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYA III.

IX.

ZARYS
TEORYI MNOGOŚCI

NAPISAŁ

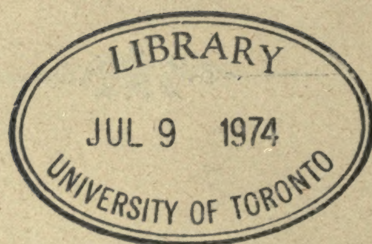
Dr WACŁAW SIERPIŃSKI,
PROFESOR UNIWERSYTETU LWOWSKIEGO.



WARSZAWA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDEGO I S-KI.

1912.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.



TREŚĆ.

		Str.
Przedmowa		VII
ROZDZIAŁ I.	Wstęp	1
ROZDZIAŁ II.	Zbiory przeliczalne	13
ROZDZIAŁ III.	Zbiory uporządkowane	32
ROZDZIAŁ IV.	Zbiory mocy continuum	60
ROZDZIAŁ V.	Nierówności dla liczb kardynalnych	72
ROZDZIAŁ VI.	Mnogości punktowe przestrzeni m-wymiarowej	87
ROZDZIAŁ VII.	Teorya mnogości punktowych liniowych	109
ROZDZIAŁ VIII.	Zbiory dobrze uporządkowane	138
Skorowidz alfabetyczny		157

PRZEDMOWA.

Celem niniejszej książki jest zaznajomienie czytelnika w sposób możliwie przystępny z ważniejszemi zagadnieniami i wynikami Teoryi mnogości. Nauka ta, będąc dzisiaj nieodzowną dla matematyków, może jednak—ze względu na swą treść i metody—interesować też i osoby, nie oddające się specyalnym studyom matematycznym, zwłaszcza filozofów. Do rozumienia tej książki wystarczają zaledwie minimalne wiadomości z Matematyki; potrzebne jest tylko pewne przyzwyczajenie do abstrakcyjnego myślenia; studyowanie jej można więc rozpocząć już w każdym razie w pierwszym roku nauki uniwersyteckiej.

Teorya mnogości posiada już dzisiaj liczne zastosowania, zarówno w Analizie jak i w Geometryi. Winienem parę słów wyjaśnienia, dlaczego nie uwzględniłem tu obszerniej tych zastosowań. Przedewszystkiem dlatego, żeby zachować pewną jednolitość tak pod względem treści, jak i pod względem wymaganego od czytelnika przygotowania. Zastosowania bowiem Teoryi mnogości są nader różnorodne: przy omawianiu każdego z nich musielibyśmy naturalnie opierać się na pewnych wiadomościach z odpowiedniego działu Matematyki wyższej, przez co wykład nasz straciłby na przystępności. Zresztą trudno nawet w dzisiejszych zastosowaniach Teoryi mnogości wskazać pewną granicę: Teorya mnogości wywarła bowiem w ostatnich czasach wpływ na ugruntowanie i rozwój wszystkich niemal działów Analizy. Chcąc zatem uwzględnić należycie choćby ważniejsze tylko zastosowania Teoryi mnogości, musielibyśmy napisać dzieło, kilkakrotnie przewyższające objętość niniejszego. Przytem owe zastosowania obchodzą bliżej tylko pewną kategoryę czytelników. Oto są względy, dla jakich poprzestałem jedynie na tych zastosowaniach Teoryi mnogości, które dla niej samej mają pierwszorzędne znaczenie.

W początkach rozwoju Teoryi mnogości nader ważną rolę odgrywały liczby porządkowe pozaskończone, jako narzędzie badania mnogości punktowych. Sam twórca teoryi liczb pozaskończonych (G. Cantor) został niejako z konieczności doprowadzony do jej zbudowania, szukając dowodów na różne twierdzenia z Teoryi mnogości punktowych; później jednak znaleziono dla tych twierdzeń dowody o wiele prostsze i krótsze, nie oparte na teoryi liczb porządkowych pozaskończonych. Jakkolwiek owe dawniejsze dowody, oparte na indukcyi pozaskończonej, nie utraciły i dzisiaj swojej wartości, oświetlając odnośne kwestye z innej całkiem strony, a teorya liczb pozaskończonych stanowi obecnie sama przez się ważny i ciekawy dział ogólnej Teoryi mnogości, to jednak, nie chcąc zwiększać objętości książki, wyłożyłem teoryę mnogości punktowych niezależnie od teoryi liczb porządkowych pozaskończonych, odsuwając tę ostatnią aż do ostatniego rozdziału. Kogo jednak teorya ta szczególniej interesuje, ten może studyowanie jej rozpocząć już zaraz po przeczytaniu pierwszych trzech rozdziałów.

W końcu książki dodałem dla wygody czytelnika skorowidz alfabetyczny nazw. Winienem dodać, że w paru miejscach wkradły się do tekstu nazwy obce zamiast odpowiednich nazw polskich, utartych już w naszem piśmiennictwie matematycznem: mianowicie nazwa kondensacya zamiast zagęszczenie, oraz nazwa gatunek (mnogości) zamiast rodzaj.

Spełnię wreszcie miły obowiązek, jeżeli wyrażę na tem miejscu serdeczne podziękowanie Szanownym Wydawcom Biblioteki Matematyczno-Fizycznej, Panu S. Dicksteinowi i Panu A. Czajewiczowi za życzliwe zajęcie się sprawą wydania niniejszego tomu, oraz trudy, które przytem ponieśli.

Autor.

Lwów, w październiku 1912.

ROZDZIAŁ I.

Wstęp.

„S'il y a une idée première et fondamentale en Mathématique, ce n'est donc pas l'idée de nombre, mais bien celle d'ensemble".

L. Couturat. Les principes des Mathématiques (Paris 1905), p. 211.

1. W ostatniej ćwierci ubiegłego stulecia wyłoniła się nauka, która mimo krótkiego czasu swego istnienia zdążyła już zająć pierwszorzędne stanowisko wśród różnych działów Matematyki. Jest nią Teorya mnogości[1]).

Twórcą Teoryi mnogości jest Georg Cantor[2]); pewne atoli pojęcia, któremi nauka ta operuje, zostały przygotowane przez prace innych uczonych XIX-go wieku, jako to: Bolzano, Weierstrassa, Fouriera, Dirichleta, Riemanna, Hankela, du-Bois-Reymonda.

Śmiało rzec można, że cała niemal Analiza współczesna jest przesiąknięta Teoryą mnogości; nauka ta przyczyniła się do wyświetlenia i zgłębienia tylu różnych kwestyj, że dzisiaj wykład już nawet początków Matematyki wyższej obyć się bez niej nie może.

Zarówno też z filozoficznego punktu widzenia, analizując pojęcie „nieskończoności", Teorya mnogości przedstawia niemały interes, a róż-

[1]) Nazwa, wprowadzona u nas przez J. Puzynę, jako trafny przekład nazwy niemieckiej „Mengenlehre". Francuzi używają mniej udatnej nazwy „Théorie des ensembles", podobnież Włosi: „Teoria degli aggregati", Anglicy: „The theory of sets".

[2]) Georg Ferdynand Ludwik Filip Cantor, ur. 3 marca 1845 roku w Petersburgu. Doktorat otrzymał w Berlinie w r. 1867. Obecnie jest zwyczajnym profesorem matematyki uniwersytetu w Halli. Odróżniać go należy od Maurycego Cantora, nestora współczesnyeh historyków matematyki.

ne jej paradoksy i tak zwane antynomie sporo wśród logików i logistyków narobiły wrzawy.

Niektóre znów zagadnienia i wyniki Teoryi mnogości są tak proste i łatwe do wyłożenia, a z drugiej strony posiadają tyle pierwiastków kształcących, że, zdaniem mojem, mogą, a nawet stanowczo powinny znaleść się w programie szkół średnich, jako należące do minimum tych wiadomości, które stanowią tak zwane wykształcenie ogólne[1]).

2. Teorya mnogości zajmuje się zbiorami nieskończonemi. Pojęcie zbioru rozumiemy tu jaknajogólniej. Przedmiotem naszych rozważań mogą być zbiory jakichś przedmiotów realnych, ale równie dobrze zbiory pojęć, lub nawet zbiory zbiorów pojęć.

Lecz cóż to jest zbiór?

Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważymy przedewszystkiem, że niepodobna żądać definicyi każdego wyrazu. W samej rzeczy: definicyę wyrażamy zdaniem, w którem, oprócz określanego wyrazu, znajdują się jeszcze inne wyrazy; musielibyśmy więc wprzódy zdefiniować każdy z tych ostatnich, na co potrzebaby nowych wyrazów, aby nie wpaść w błędne koło, i t. d. Gdzieś wreszcie musimy się zatrzymać: musimy się więc zgodzić na przyjęcie pewnych pojęć bez definicyi.

Chodzi więc teraz o to, czy przyjąć bez definicyi pojęcie zbioru. Musielibyśmy to uczynić w każdym razie wówczas, gdybyśmy nie potrafili określić tego pojęcia przez inne prostsze. Aby się przekonać, czy tak jest istotnie, przytoczymy dosłownie zdania kilku wybitnych autorów.

„Unter einer Mannigfaltigkeit oder Menge—powiada Cantor[2]) — verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, velches sich als Eines denken lässt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzem verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definiren, was verwandt ist mit dem Platonischen εἶδος oder ἰδέα".

Piękne to zdanie trudno chyba uważać za ścisłą definicyę zbioru.

Wyraźnej znowu tautologii dopuszcza się de la Vallée Poussin,

---

[1]) Twierdzę tak wbrew zdaniu F. Kleina (Elementarmatematik vom höherem Standpunkte aus. Theil I, p 586 Lipsk, 1908), według którego nic z teoryi mnogości nie da się wprowadzić do szkoły średniej. Należy tu jednak oczywiście unikać przesady: teorya mnogości nie może np. poprzedzać Arytmetyki; godzę się też ze zdaniem Poincarégo, że uzależnianie nauki o liczbach skończonych od teoryi liczb pozaskończonych, byłoby przeciwnem wszelkiej zdrowej psychologii.

[2]) Math. Annalen 21, p. 587.

definiując w swym świetnym poza tem kursie Analizy[1]) pojęcie zbioru zdaniem:

„Un ensemble est une collection d'objets ou d'éléments quelconques en nombre fini ou infini".

Natomiast Borel powiada[2]):

„Nous ne chercherons pas à donner une définition du mot «ensemble»: il nous paraît qu'il y a là une notion suffisamment primitive pour qu'une définition en soit au moins inutile".

Podobnegoż zdania jest Baire[3]):

„Le mot ensemble, à cause même de sa simplicité et de sa généralité, ne paraît pas susceptible d'une définition précise".

Zgódźmy się więc i my, aby zaliczyć pojęcie zbioru do pierwotnych, t. j. takich, które nie dają się określić przez inne, prostsze pojęcia.

3. Weźmy pod rozwagę dwa jakiekolwiek zbiory i oderwijmy myśl naszą od porządku oraz jakości ich elementów. Jeżeli po takiem abstrahowaniu, zbiory nasze już niczem nie będą się różniły od siebie, to powiemy, że są one zbiorami równej mocy. W przeciwnym razie powiemy o naszych zbiorach, że ich moce są różne[4]).

Pojęcie równej lub różnej mocy jest więc równoważnem pojęciu równej lub różnej liczności—jeżeli to ostatnie zechcemy stosować też względem zbiorów nieskończonych.

Sama już intuicya wskazaje, że nie wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy. Weźmy np. pod rozwagę następujące zbiory:

A)	Zbiór	wszystkich	liczb dodatnich parzystych.		
B)	„	„	„	naturalnych[5]).	
C)	„	„	„	wymiernych.	
D)	„	„	„	rzeczywistych.	
D')	„	„	punktów danej prostej.		
E)	„	„	„	„	płaszczyzny.
F)	„	„	„	„	przestrzeni.
G)	„	„	prostych w przestrzeni.		
H)	„	„	położeń danej bryły w przestrzeni.		

---

[1]) Cours d'Analyse infinitésimale. T. I, p. 40.

[2]) Leçons sur la Théorie des fonctions, p. 1. Paris 1898.

[3]) Wydanie francuskie Encyklopedyi matematycznej, T. I, vol 1, p. 489.

[4]) Definicyę taką niektórzy uważają za zbyt ogólnikową: dalej podamy ściślejsze określenie pojęcia zbiorów równej lub różnej mocy.

Zauważymy przytem, że Cantor idzie dalej i określa samo pojęcie mocy jako tej własności zbioru, którą otrzymamy, abstrahując od porządku i jakości jego elementów.

[5]) Przez liczbę naturalną rozumiemy liczbę całkowitą dodatnią.

Co do stosunkowej liczności tych zbiorów intuicya podsuwa nam następujące wnioski, których słuszności zresztą nie przesądzamy:

Zbiór B jest dwakroć liczniejszy od zbioru A. Oba zbiory D i D' są równej mocy. Każdy ze zbiorów C, D, E, F, G, H jest nieskończenie liczniejszy od poprzedzającego.

4. Podzielmy wszystkie możliwe zbiory na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy wszystkie zbiory jednej i tej samej mocy. Każdą taką klasę umówimy się oznaczać specyalnym symbolem: symbole te nazywać będziemy liczbami kardynalnemi.

Ponieważ w sferze zbiorów skończonych pojęcie zbiorów równej mocy identyfikuje się z pojęciem zbiorów o równej liczbie elementów, więc jako odnośne symbole liczb kardynalnych najprościej i najdogodniej będzie przyjąć odnośne liczby naturalne: zatem dla zbioru skończonego o n elementach—samą liczbę n. Prócz tych symboli znajdą się jednak jeszcze inne liczby kardynalne, mianowicie odpowiadające zbiorom nieskończonym. (Nie przesądzamy narazie czy taka liczba kardynalna będzie tylko jedna, czy też będzie ich więcej). Dla odróżnienia ich od liczb kardynalnych skończonych (czyli liczb naturalnych) będziemy je nazywali liczbami kardynalnemi pozaskończonemi (transfiniti); możnaby je też nazywać nadskończonemi (suprafiniti); dla oznaczania tych liczb możemy używać jakichkolwiek liter lub znaczków, byleby różnych od liczb naturalnych. (Najczęściej będziemy używali liter gotyckich: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{n}$,...). Liczby kardynalne są więc, jak widzimy, uogólnieniem liczb naturalnych (obejmującem te ostatnie jako przypadek szczególny).

5. Dla ustalenia, kiedy dwie dane liczby kardynalne mamy uważać za równe lub różne, musimy przedewszystkiem określić, kiedy mamy uważać za jednakowe lub różne moce dwóch danych zbiorów—w razie, gdy zbiory te są nieskończone. Jako punkt wyjścia dla ścisłej definicyi w tym względzie posłuży nam analogia ze zbiorami skończonemi.

Aby się przekonać, czy dwa dane zbiory skończone są jednakowo liczne, tworzymy kolejne pary, wybierając po jednym elemencie z każdego ze zbiorów. Zbiory nasze będą jednakowo liczne wtedy i wtedy tylko, jeżeli postępując, w powyższy sposób, wyczerpiemy je oba jednocześnie.

Proces powyższy wyznacza zarazem pewne wzajemne podporządkowanie elementów uważanych zbiorów. Każdy bowiem element jednego z naszych zbiorów posiada swoją parę, a więc wyznacza pewien element drugiego zbioru i naodwrót. Podporządkowanie to nazwiemy jednoznaczno-jednoznacznem (lub krócej: jedno-jedno-

znacznem), gdyż każdy element jednego zbioru wyznacza jeden tylko element drugiego i naodwrót[1]).

Dwa zbiory skończone są więc jednakowo liczne wtedy i wtedy tylko, jeżeli między ich elementami da się ustalić odpowiedniość jedno-jednoznaczna.

O odpowiedniości jedno-jednoznacznej może być mowa również w odniesieniu do zbiorów nieskończonych, wtedy kiedy wyczerpanie kolejne wszystkich elementów staje się niemożliwem. Np. odpowiedniość taką możemy ustalić dla zbioru wszystkich liczb dodatnich nieparzystych oraz zbioru wszystkich liczb dodatnich parzystych, podporządkowywując każdej liczbie nieparzystej liczbę parzystą, o jedność od niej większą.

Ustaleniem odpowiedniości doskonałej (czyli jedno-jednoznacznej) między elementami dwóch danych zbiorów nazywać będziemy tego rodzaju skojarzenie ich w pary, przy którem w każdej parze mamy po jednym elemencie z każdego zbioru i przytem każdy element ma swoją parę. Elementy, stanowiące jednę parę, nazywać będziemy odpowiedniemi[2]).

Analogia ze zbiorami skończonemi usprawiedliwia teraz postawienie następującej definicyi równości mocy:

O dwóch danych zbiorach M i N będziemy mówili, że są równej mocy, jeżeli między ich elementami daje się[3]) ustalić odpowiedniość doskonała; w przeciwnym razie będziemy je nazywali zbiorami różnej mocy. Dla wyrażenia, że zbiory M i N są równej mocy, będziemy pisali:

$$M \sim N.$$

6. Z przyjętej definicyi równości mocy wynika natychmiast, że spełnia ona następujące prawa:

I. Prawo tożsamości, wyrażające się wzorem

$$M \sim M,$$

dla wszelkiego zbioru M.

---

[1]) Niektórzy autorowie używają zamiast „jedno-jednoznaczny“ terminu „dwu-jednoznaczny“, jako tłomaczenie francuskiego „biunivoque“. Termin ten jednak może się stać... dwuznacznym i dlatego wolę go unikać.

[2]) Pojęciem odpowiedniości i rolą jego w Matematyce zajmowałem się bliżej w wykładzie, ogłoszonym w Przeglądzie filozoficznym z r. 1909 (zeszyt 1).

[3]) „daje się“ oczywiście w znaczeniu „możliwem jest“, a nie w znaczeniu „potrafimy“. Co byłoby jednak, gdybyśmy o pewnych dwóch zbiorach dowiedli, że żadne wnioskowanie nie jest w stanie rozstrzygnąć, czy zbiory te są równej, czy różnej mocy? (Porówn. w tym względzie: G. Hessenberg. Grundbegriffe der Mengenlehre. Göttingen 1906. Kap. XXII).

II. Prawo symetryi, polegające na tem, że ze wzoru

$$M \sim N$$

wynika zawsze:

$$N \sim M.$$

III. Prawo przechodniości, według którego wzory

$$M \sim N, N \sim P,$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$M \sim P.$$

7. Niektórzy autorowie, zwłaszcza t. zw. logistycy, definiują samo pojęcie mocy, nazywając mocą danego zbioru bądź własność wspólną wszystkim zbiorom, będącym równej z danym mocy — a za taką własność można przyjąć już samą własność należenia do jednej i tej samej klasy zbiorów—bądź też nazywając mocą danego zbioru całą klasę zbiorów, będących z nim równej mocy [1]).

Inni jednak autorowie, np. Borel, wątpią, aby można było rozumować o mocy, niezależnie od wszelkiego substratum.

Dla samej Teoryi mnogości cała ta kwestya jest mniejszej wagi, jak to zresztą najlepiej wynika z następującego zdania Couturata[2]), które tu dosłownie przytoczę:

„Le mathématicien ne définit jamais les grandeurs en elles mêmes, comme le philosophe serait tenté de le faire; il définit leur égalité, leur somme et leur produit, et ces définitions déterminent ou plutôt constituent les propriétés mathématiques des grandeurs. D'une façon plus abstraite et plus formelle encore il pose des symboles, et pose en même temps les règles suivant lesquelles il devra les combiner ensemble; ces règles suffisent à caractériser ces symboles et à leur donner une valeur mathématique. En un mot il crée des êtres mathématiques au moyen de conventions arbitraires...“

8. Rozpatrzmy teraz bliżej kilka przykładów na zbiory równej lub różnej mocy.

Jako pierwszy przykład weźmiemy zbiory, oznaczone w art. 3-cim literami A) i B). Powiadam, że zbiór wszystkich liczb dodatnich parzystych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

---

[1]) Np. Couturat: Les principes des Mathématiques. Paris 1905, p. 222.

[2]) De l'infini mathématique. Paris 1896, p. 49. Porówn. tamże p. 341.

Dla dowodu należy okazać, że możliwe jest ustalenie odpowiedniości doskonałej między elementami uważanych zbiorów. W tym celu wystarczy skojarzyć w pary każdą liczbę naturalną wraz z dwa razy większą od niej liczbę parzystą. Dla lepszego wyjaśnienia sobie tej odpowiedniości wyobraźmy sobie wypisane w jednym wierszu wszystkie kolejne liczby naturalne, a w drugim wszystkie kolejne liczby dodatnie parzyste:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots n,\ldots$$
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ldots 2n,\ldots$$

Odpowiedniemi są tu elementy obu zbiorów, wypisane w jednej i tej samej kolumnie.

Rozpatrzony przykład jest nader pouczający: dowodzi on mianowicie, że zbiór nieskończony może być równej mocy ze swą właściwą częścią. (Przez *część* danego zbioru rozumiemy zbiór, którego wszystkie elementy są zarazem elementami danego zbioru. Część nazywamy *właściwą*, jeżeli składa się nie ze wszystkich elementów danego zbioru). Okażemy później, że jest to własność charakterystyczna każdego zbioru nieskończonego.

9. Jako drugi przykład na zbiory równej mocy weźmiemy zbiory B) i C) z art. 3-go.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Dowód. Każdą liczbę wymierną w możemy, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci ułamka nieprzywiedlnego $\frac{p}{q}$ o naturalnym mianowniku. (Jako odnośne przedstawienie zera należy oczywiście uważać ułamek $\frac{0}{1}$).

Podzielmy teraz wszystkie liczby wymierne na klasy, zaliczając do k-tej klasy wszystkie te ułamki nieprzywiedlne $\frac{p}{q}$, dla których

$$|p| + q = k$$

(symbol $|p|$ oznacza wartość bezwzględną licznika p). Każda liczba wymierna będzie zatem należała do oznaczonej klasy. Jasnem jest z drugiej strony, że w każdej klasie będziemy mieli zawsze *skończoną* liczbę liczb wymiernych, gdyż wszystkie elementy k-tej klasy otrzymamy z ciągu

$$\frac{-(k-1)}{1},\quad \frac{-(k-2)}{2},\ldots \frac{-1}{k-1},\quad \frac{0}{k},\quad \frac{1}{k-1},\quad \frac{2}{k-2},\ldots \frac{k-2}{2},\quad \frac{k-1}{1},$$

po odrzuceniu tych ułamków, ktore dadzą się skrócić.

Wyobraźmy sobie teraz wypisane w jednym wierszu wszystkie elementy pierwszej klasy, po nich drugiej, trzeciej i t. d., porządkując elementy każdej klasy np. według ich wielkości rosnących. Otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony:

$$\frac{0}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{1},\ -\frac{2}{1},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{3}{1},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ -\frac{4}{1},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ldots,$$

w którym znajdziemy każdą liczbę wymierną i przytem każdą raz tylko jeden.

Jeżeli teraz z każdą liczbą wymierną skojarzymy jej numer porządkowy w utworzonym ciągu, to otrzymamy żądaną odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów B) i C).

Gdyby nam chodziło o praktyczne wyznaczenie numeru jakiejś danej liczby wymiernej (np. $\frac{22}{7}$), to oczywiście wymagałoby to długiego rachunku, co jednak nie jest żadną wadą z punktu widzenia Teoryi mnogości, gdzie nam chodziło jedynie o dowód możliwości ustalenia odnośnej odpowiedniości, a nie o stosowanie jej w praktyce. Możnaby zresztą naturalnie poszukiwać innych sposobów ustalenia odpowiedniości doskonałej między elementami uważanych zbiorów, tak iżby przejście od danej liczby wymiernej do jej numeru (albo naodwrót) dawało się uskutecznić zapomocą łatwiejszych rachunków. Przed kilku właśnie laty G. Faber[1]) podał taki sposób, w szczególności, dla zbioru wszystkich ułamków właściwych.

Prostszy jeszcze sposób podaje dla tego zbioru p. O. Nikodym. Opiera się on na uwadze, że każdy ułamek właściwy (dodatni) daje się, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego

$$w = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami naturalnemi, przyczem $a_n \geqslant 2$.

Połóżmy przez skrócenie

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = s_k \text{ (dla } k = 1, 2, \ldots, n)$$

i podporządkujmy ułamkowi w numer

$$N = 2^{s_1-2} + 2^{s_2-2} + \ldots + 2^{s_n-2}.$$

[1]) Ueber die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. Math. Annalen Bd. 60, p. 196—203.

Łatwo możnaby okazać, że podporządkowanie to wyznacza odpowiedniość doskonałą między zbiorem wszystkich ułamków właściwych (dodatnich) a zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Jako przykład, czytelnik obliczy z łatwością, że dla $w = \frac{7}{10}$ będzie $N = 26$; dla $N = 100$ będzie $w = \frac{13}{17}$.

10. Rozpatrzone w dwóch ostatnich art. przykłady przekonywają nas, jak mylnem było nasze pojęcie intuicyjne o liczności zbiorów A, B i C z art. 3-go. Skłonni byliśmy zbiory te uważać za zbiory różnej mocy, mianowicie zbiór B za zbiór mocy dwa razy większej od zbioru A (bo liczb parzystych, zdawałoby się, jest dwa razy mniej, niż liczb naturalnych), zaś zbiór C za zbiór mocy nieskończenie większej od zbioru B (bo między każdemi dwiema liczbami naturalnemi zawiera się nieskończenie wiele liczb wymiernych). Tymczasem ściślejsza analiza wykazała, że wszystkie te trzy zbiory są tej samej mocy.

Łatwo sobie wyjaśnić przyczynę tego paradoksu. Wprowadzając pojęcie mocy, zastrzegaliśmy, że mamy oderwać naszą uwagę od porządku oraz jakości elementów zbioru, tymczasem przypuszczenie nasze, że liczb naturalnych jest dwa razy więcej niż parzystych, opieraliśmy właśnie na porządku, w jakim te ostatnie spotykamy w ciągu liczb naturalnych (mianowicie na uwadze, że między każdemi dwiema liczbami parzystemi zawsze jest jeszcze jedna liczba naturalna). Podobnież, sądząc, że zbiory B i C są różnej mocy, mieliśmy ciągle na względzie uporządkowanie wszystkich liczb wymiernych według ich wielkości.

W każdym jednak razie musimy teraz uznać za zachwiane również i inne nasze przeświadczenia intuicyjne co do mocy zbiorów nieskończonych, a przedewszystkiem możemy mieć wątpliwość już i co do tego, czy wogóle istnieją zbiory nieskończone różnej mocy. Rozstrzygnięcie tego pytania jest dla Teoryi mnogości sprawą wielkiej wagi. Gdyby bowiem miało się okazać—za czem przemawiają narazie przykłady zbiorów A, B, C—że wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy, to mielibyśmy jednę jedyną liczbę kardynalną pozaskończoną (∞) i, co się tyczy pojęcia mocy, tudzież liczb kardynalnych — Teorya mnogości nie miałaby nic więcej do roboty.

Okażemy jednak, że tak nie jest: że istnieją mianowicie zbiory nieskończone różnej mocy. Wystarczy dla dowodu oczywiście dać choć jeden przykład dwóch zbiorów nieskończonych, które byłyby różnej

mocy. Jako taki obierzemy zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych między 0 a 1.

11. Załóżmy, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych między zerem i jednością jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Można więc ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami obu zbiorów: niech przytem u_n będzie liczbą rzeczywistą, odpowiadającą liczbie naturalnej n.

Każdą liczbę rzeczywistą między 0 i 1 możemy, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci t. zw. ułamka dziesiętnego istotnie nieskończonego, t. j. takiego ułamka dziesiętnego, w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od zera. Niech więc

$$u_n = 0, c_1^{(n)} c_2^{(n)} c_3^{(n)} \dots$$

będzie takim właśnie ułamkiem dla liczby u_n.

Zbudujemy teraz pewną liczbę rzeczywistą

$$u = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

wyznaczając cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego, jak następuje.

Dla określenia cyfry c_n wyznaczamy najprzód cyfrę $c_n^{(n)}$: jeżeli jest nią zero albo 1, to kładziemy $c_n = 2$, w przeciwnym razie kładziemy $c_n = 1$. Będzie więc przy wszelkiem n

$$c_n \neq c_n^{(n)}.$$

Wyznaczona w powyższy sposób liczba u będzie oczywiście zawarta między 0 i 1: w myśl zakładanej odpowiedniości doskonałej, musi więc ona odpowiadać pewnemu numerowi, np. k, tak iż

$$u = u_k.$$

Lecz w takim razie rozwinięcia

$$u = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

oraz

$$u_k = 0, c_1^{(k)} c_2^{(k)} c_3^{(k)} \dots$$

byłyby ułamkami dziesiętnemi istotnie nieskończonemi dla jednej i tej samej liczby, a jako takie musiałyby być identyczne. Rozwinięcia te różnią się jednak w k-tej cyfrze, gdyż

$$c_k \neq c_k^{(k)}.$$

Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia o równości mocy uważanych zbiorów.

Istnieją zatem zbiory nieskończone różnej mocy.

Będziemy więc mieli conajmniej dwie różne (t. j. odpowiadające zbiorom różnej mocy) liczby kardynalne pozaskończone. Możnaby teraz pójść dalej i zapytać, ile będzie wogóle różnych liczb kardynalnych pozaskończonych: udowodnimy później, że jest ich nieskończenie wiele. Możnaby wreszcie zapytać, jaka będzie moc (nieskończonego) zbioru wszystkich różnych liczb kardynalnych pozaskończonych: i o to pytanie w swoim czasie potrącimy.

12. Rozumowanie, analogiczne do przeprowadzonego w poprzednim artykule, było przyczyną pewnego ciekawego paradoksu, znanego pod nazwą antynomii Richarda[1]).

Ze względu na interes, jaki sprawa ta przedstawia, omówimy ją tutaj obszerniej.

Wypiszmy wszystkie 32 litery alfabetu polskiego, następnie wszystkie kombinacye tych liter po dwie, ustawiając te kombinacye w porządku alfabetycznym, po nich wszystkie kombinacye z trzech liter, znowu w porządku alfabetycznym, dalej z czterech liter i t. d. Kombinacye te mogą zawierać tę samą literę, powtórzoną kilkakrotnie: są to kombinacye z powtórzeniami.

Każde zestawienie skończonej liczby liter alfabetu polskiego znajdzie się zatem w oznaczonem w zupełności miejscu utworzonej przez nas tablicy. Między temi zestawieniami liter znajdą się oczywiście i takie, które będą definicyami jakiejś liczby rzeczywistej (np. dwa, sto, ćwierć). Usuńmy z naszej tablicy te elementy, które nie są definicyami liczb rzeczywistych. Pozostałe zdania, będące zatem definicyami liczb rzeczywistych, oznaczymy kolejnemi numerami 1, 2, 3,..., opuszczając przytem te zdania, które definiują liczbę już poprzednio innem zdaniem zdefiniowaną (Np. opuszczając wyraz połowa, gdyż ta sama liczba została już wcześniej określoną wyrazem pół)[2]).

W ten sposób ustalimy odpowiedniość doskonałą między wszystkiemi liczbami naturalnemi z jednej strony a wszystkiemi liczbami rzeczywistemi, które dają się zdefiniować zapomocą skończonej liczby słów—z drugiej.

Oznaczmy przez E zbiór tych ostatnich. Sprzeczność będzie polegała na tem, że za chwilę określimy zapomocą skończonej liczby słów liczbę rzeczywistą, nie należącą do zbioru E.

---

[1]) Acta mathematica T. **30** (1906), p. 295, oraz Revue générale des Sciences **16** (1905).

[2]) Oczywiście chodzi tutaj o definicye jednej tylko liczby, zatem zdania takie jak „Wszystkie liczby naturalne mniejsze od tysiąca" będziemy wykreślali.

„Niech p oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony n-tej liczby zbioru E; utwórzmy liczbę, mającą zero jako całość, zaś jako n-tą cyfrę, cyfrę $p+1$, jeżeli p jest mniejsze od ośmiu, oraz cyfrę jedność w przypadku przeciwnym".

Określona w ten sposób liczba rzeczywista N nie należy do zbioru E, o czem przekonalibyśmy się, powtarzając rozumowanie z art. 11-go. Z drugiej strony liczba N jest określona zdaniem, wziętem w cudzysłów, a więc za pomocą skończonej ilości słów. Liczba N powinna więc należeć do zbioru E. Mamy więc sprzeczność.

Sam już Richard stara się dowieść, że sprzeczność ta jest tylko pozorna.

Oznaczmy przez G zestawienie liter zdania w cudzysłowie. Układ liter G znajdzie się w tablicy kombinacyj liter, którą budowaliśmy na początku. Lecz w miejscu, które tam zajmuje, układ G nie ma sensu. Jest tam bowiem mowa o zbiorze E, który jeszcze nie jest zdefiniowanym. Powinniśmy więc byli układ G usunąć z naszej tablicy. Układ G ma sens tylko wtedy, gdy zbiór E jest całkowicie zdefiniowany, czego niepodobna uskutecznić zapomocą skończonej liczby słów. Sprzeczności zatem niema.

Możnaby tu zrobić jeszcze następującą uwagę. Gdybyśmy, spotkawszy układ G w pierwotnej naszej tablicy, chcieli zaliczyć N do zbioru E, to musielibyśmy liczbie N nadać w tym zbiorze odpowiedni numer, np. k. Ale w takim razie jak wyznaczymy k-tą cyfrę liczby N? Ponieważ cyfra ta jest nieokreślona, więc układ G nie określa żadnej liczby i przeto musimy go usunąć z naszej tablicy [1]).

---

[1]) Dłuższe uwagi antynomii Richarda poświęca Poincaré w Acta Mathematica, T. 32 (1909), p. 195 i nast. Zob. też Borel: Leçons sur la Théorie de croissance. Paris 1910, p. 121 - 124.

ROZDZIAŁ II.

Zbiory przeliczalne.

1. Zbiory równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych noszą nazwę zbiorów przeliczalnych. Definicya ta jest, jak to odrazu widzimy, równoważna następującej:

Dany zbiór nazywamy przeliczalnym wtedy i wtedy tylko, jeżeli elementy jego mogą być ponumerowane w ten sposób, iżby każdy element zbioru nosił swój oznaczony numer i żeby każdemu numerowi odpowiadał oznaczony element zbioru.

Wynika stąd natychmiast, że wszystkie wyrazy danego ciągu nieskończonego (liczb lub innych elementów)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

tworzą zawsze zbiór przeliczalny, i naodwrót: wszystkie elementy każdego danego zbioru przeliczalnego mogą być ustawione w ciąg nieskończony.

Jasnem jest również, że każda część zbioru przeliczalnego — o ile zawiera nieskończenie wiele elementów — jest zbiorem przeliczalnym.

W art. 8 i 9 Rozdziału I poznaliśmy dwa przykłady zbiorów przeliczalnych. Rozpatrzymy teraz jeszcze jeden przykład, mający wielkie znaczenie teoretyczne.

2. Niech a oraz $b > a$ będą dwie dane liczby rzeczywiste. Nazywać będziemy przedziałem (a, b) zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówności:

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

O danej liczbie x_0 będziemy mówili, że należy do przedziału (a, b), jeżeli

$$a \leqslant x_0 \leqslant b,$$

zaś, że x_0 leży wewnątrz przedziału (a, b), jeżeli

$$a < x_0 < b.$$

O dwóch danych przedziałach (a, b) i (c, d) będziemy mówili, że nie zachodzą na siebie, jeżeli nie posiadają wspólnych elementów wewnętrznych. Możnaby z łatwością okazać, że wtedy albo $b \leqslant c$, albo też $d \leqslant a$.

Udowodnimy obecnie, że każdy zbiór przedziałów, nie zachodzących na siebie, jest albo skończony albo przeliczalny.

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że każdemu przedziałowi (a, b) możemy podporządkować oznaczoną w zupełności liczbę wymierną, wewnątrz niego leżącą. Ustawmy w tym celu w pewien ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne (np. tak jak to uczyniliśmy w art. 9 Rozdz. I). Między każdemi dwiema nierównemi liczbami rzeczywistemi zawiera się, jak wiadomo, nieskończenie wiele liczb wymiernych, które wszystkie muszą się znaleść w naszym ciągu. Możemy więc być pewni, że posuwając się w naszym ciągu, natrafimy na liczby wymierne, leżące wewnątrz danego przedziału (a, b): pierwszą taką napotkaną liczbę podporządkujmy uważanemu przedziałowi.

Jasnem jest, że, przy naszem podporządkowaniu, dwom, nie zachodzącym na siebie, przedziałom będą odpowiadały zawsze różne liczby wymierne. Stąd wynika natychmiast, że każdy zbiór przedziałów, nie zachodzących na siebie, jest równej mocy z pewnym zbiorem samych różnych liczb wymiernych, a więc z pewną częścią zbioru przeliczalnego. Jako taki, musi więc sam być albo skończony, albo przeliczalny, c. b. d. o.

Liczne zastostowania dowiedzionego twierdzenia spotkamy w następnych rozdziałach.

3. Niech M i N będą dwa dane zbiory (skończone lub nieskończone), nie posiadające wspólnych elementów. Połączmy elementy obu naszych zbiorów w jeden zbiór S: będziemy go nazywali sumą zbiorów M i N, pisząc

$$M + N = S, \text{ lub } S = M + N.$$

Pojęcie sumy zbiorów z łatwością daje się uogólnić i na większą ich liczbę; oczywistem jest przytem, że suma skończonej liczby zbiorów posiada własność przemienności oraz łączności składników.

Jasnem jest też, że wzory

$$M \sim M_1 , \quad N \sim N_1$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$M + N \sim M_1 + N_1 .$$

Niech teraz $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ będą liczby kardynalne, odpowiadające zbiorom M, N, S. Wobec $S = M + N$ naturalną będzie umowa, aby nazywać liczbę kardynalną $\mathfrak{s}$ sumą liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$, pisząc

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{s}, \text{ lub } \mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

Jasnem jest, że każde dwie dane liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą posiadały oznaczoną w zupełnosci sumę, zależną jedynie od liczb $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$.

Pojęcie sumy liczb kardynalnych daje się natychmiast uogólnić na dowolną skończoną liczbę składników, przyczem jasnem jest znowu, że suma taka posiada prawa przemienności i łączności składników.

4. Oznaczmy przez $\mathfrak{a}$ liczbę kardynalną, odpowiadającą zbiorom przeliczalnym, zaś $\mathfrak{e}$ niech oznacza dowolną daną liczbę kardynalną skończoną (a więc liczbę naturalną).

Mając dany zbiór przeliczalny

$$u_1, u_2, u_3,$$

oraz zbiór skończony

$$v_1, v_2. v_3, \ldots, v_{\mathfrak{e}}$$

możemy je połączyć w jeden zbiór przeliczalny:

$$v_1, v_2, \ldots v_{\mathfrak{e}}, u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

skąd natychmiast wnosimy, że dla każdej liczby kardynalnej skończonej $\mathfrak{e}$ mamy:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}.$$

Dwa zbiory przeliczalne

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

oraz

$$v_1, v_2, v_3, \ldots$$

też możemy połączyć w jeden zbiór przeliczalny

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots,$$

skąd wynika odrazu:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

5. Mając dwa dane zbiory M i N, z których drugi jest właściwą częścią pierwszego, nazywamy różnicą uważanych zbiorów zbiór R wszystkich tych elementów zbioru M, które nie należą do N. Piszemy:

$$R = M - N, \text{ albo } M - N = R,$$

i powiadamy, że zbiór R otrzymaliśmy ze zbioru M, usuwając z niego wszystkie elementy, należące do zbioru N.

Zdawałoby się na pierwszy rzut oka, że pojęcie różnicy dwóch zbiorów może być punktem wyjścia dla definicyi różnicy liczb kardynalnych, podobnie jak pojęcie sumy zbiorów było w art. 3-cim punktem wyjścia dla definicyi sumy liczb kardynalnych. Na to potrzebaby jednak, iżby wzory

$$M \sim M_1, N \sim N_1,$$

gdzie N jest właściwą częścią zbioru M, zaś N_1—właściwą częścią zbioru M_1, pociągały za sobą zawsze wzór:

$$M - N \sim M_1 - N_1,$$

co wogóle nie jest prawdziwe.

Niech np. każdy ze zbiorów M i M_1, składa się ze wszystkich liczb naturalnych, N niech oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od 10-ciu, zaś N_1—zbiór wszystkich liczb dodatnich parzystych. Będziemy tu mieli

$$M \sim M_1, N \sim N_1,$$

natomiast wzór

$$M - N \sim M_1 - N_1$$

nie będzie spełniony, gdyż lewa jego strona przedstawia zbiór skończony (zbiór pierwszych dziesięciu liczb naturalnych), zaś prawa—zbiór przeliczalny (wszystkich liczb dodatnich nieparzystych).

Wyprowadzone w poprzednim art. wzory

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

również dowodzą, że dodawanie liczb kardynalnych nie posiada wogóle oznaczonego działania odwrotnego.

6. **Twierdzenie.** W każdym zbiorze nieskończonym można wskazać zbiór przeliczalny, będący jego częścią.

Dowód. Zakładamy, że dany zbiór zawiera nieskończenie wiele elementów. Obierzmy którykolwiek z nich i oznaczmy przez u_1. Po usunięciu tego elementu pozostanie w naszym zbiorze oczywiście jeszcze nieskończenie wiele elementów: oznaczmy którykolwiek z nich

przez u_2 i usuńmy również i t. d. Możemy w ten sposób do każdej liczby naturalnej n dobrać element u_n naszego zbioru, różny od każdego z elementów $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

będzie żądanym zbiorem przeliczalnym, stanowiącym część danego zbioru nieskończonego.

Wniosek. *Z każdego zbioru nieskończonego można zawsze usunąć taką przeliczalną mnogość elementów, żeby pozostały zbiór był jeszcze nieskończonym.*

Dowód. Wyznaczmy ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

którego wszystkie wyrazy są elementami danego zbioru nieskończonego U (Jest to możliwe w myśl dowiedzionego twierdzenia). Jeżeli teraz ze zbioru U usuniemy przeliczalną mnogość elementów

$$u_1, u_3, u_5, u_7, \ldots$$

(wszystkie wyrazy ciągu u_n o wskaźnikach nieparzystych), to pozostaną w nim conajmniej wszystkie wyrazy ciągu

$$u_2, u_4, u_6, u_8, \ldots,$$

tworzące w każdym razie zbiór nieskończony.

Dowiedziony wniosek możemy oczywiście wyrazić jeszcze w ten sposób:

Jeżeli $\mathfrak{u}$ oznacza jakąkolwiek daną liczbę kardynalną pozaskończoną, to istnieje zawsze taka liczba kardynalna $\mathfrak{u}_1$, również pozaskończona, iż mamy:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u}_1$$

7. Twierdzenie. *Do każdego zbioru nieskończonego można dołączyć skończoną albo przeliczalną mnogość elementów, nie zmieniając jego mocy.*

Innemi słowy: jeżeli $\mathfrak{u}$ oznacza liczbę kardynalną pozaskończoną, zaś $\mathfrak{e}$ jakąkolwiek liczbę kardynalną skończoną, to zawsze:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{e} = \mathfrak{u} \text{ oraz } \mathfrak{u} + \mathfrak{a} = \mathfrak{u}.$$

Dowód. Jeżeli $\mathfrak{u}$ oznacza daną liczbę kardynalną pozaskończoną, to można, jak wiemy (art. 6) znaleść taką liczbę kardynalną $\mathfrak{u}_1$, że

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{a}. \qquad (1)$$

Dodając po obu stronach jednę i tę samą liczbę kardynalną $\mathfrak{a}$ i sto-

sując względem prawej strony prawo łączności, wobec $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (art. 4), otrzymamy:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{a} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{a},$$

czyli:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{a} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{a},$$

skąd, wobec (1):

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{a} = \mathfrak{u} \tag{2}$$

Stąd, dalej, oznaczając przez $\mathfrak{e}$ dowolną daną liczbę kardynalną skończoną, mamy:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{e} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a} + \mathfrak{e},$$

a że, jak wiemy: $\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ (art. 4), więc ostatnia równość daje:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{e} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a},$$

czyli, wobec (2):

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{e} = \mathfrak{u}. \tag{3}$$

Równości (2) i (3) dowodzą prawdziwości naszego twierdzenia.

8. Niech U oznacza jakikolwiek dany zbiór nieskończony, E — zbiór skończony, będący jego częścią. Połóżmy

$$U - E = U_1$$

— będzie to oczywiście zbiór nieskończony. Będziemy również mieli

$$U = U_1 + E. \tag{4}$$

Oznaczmy przez $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{u}_1$ odpowiednio liczby kardynalne zbiorów U, E, U_1. Wobec (4) będziemy mieli:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{e}. \tag{5}$$

Z drugiej strony, w myśl tw. z art. 7 będzie

$$\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{e} = \mathfrak{u}_1, \tag{6}$$

gdyż $\mathfrak{u}_1$ jest liczbą kardynalną pozaskończoną.

Mamy zatem, wobec (5) i (6):

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1,$$

czyli zbiór U_1 jest tej samej mocy co i zbiór U.

Dowiedliśmy, więc, że *usuwając z jakiegokolwiek zbioru nieskończonego skończoną liczbę elementów, nie zmienimy przez to jego mocy.*

Jeżeli więc U uznacza jakikolwiek zbiór nieskończony, E — zbiór skończony, będący jego częścią, to mamy zawsze:

$$U - E \sim U.$$

Ale $U - E$ jest właściwą częścią zbioru U, stąd twierdzenie:

W każdym zbiorze nieskończonym można znaleść część właściwą, która jest równej mocy z całym zbiorem.

Żaden zbiór skończony własności tej oczywiście nie posiada, bo jeżeli zbiór składa się z n elementów, to każda jego część właściwa składa się conajwyżej z $n - 1$ elementów, a więc jest różnej mocy z całym zbiorem. Powyższa zatem własność jest cechą charakterystyczną zbiorów nieskończonych. Moglibyśmy ją więc—jak to uczynił Dedekind[1]—przyjąć jako definicyę zbiorów nieskończonych, mówiąc:

Zbiór jest nieskończony albo skończony, zależnie od tego czy w nim istnieje, czy też nie istnieje część właściwa, równej mocy z całym zbiorem.

Poincaré jednak drwi sobie z tych matematyków, którzy pragną w ten sposób definiować pojęcie zbioru skończonego.

Przytoczę tutaj dosłownie jego o nich zdanie[2]):

„W takim stopniu (liczni matematycy) spoufalili się z liczbami nadskończonemi, że w końcu doszli do uzależnienia teoryi liczb skończonych od teoryi liczb kardynalnych Cantora. Ich zdaniem prawdziwie logiczny wykład Matematyki powinien rozpocząć się od ustanowienia własności ogólnych liczb kardynalnych nadskończonych, i następnie wyodrębnić z pośród nich pewną malutką klasę—zwykłych liczb całkowitych. Dzięki tej okólnej drodze możnaby było dowieść wszystkich twierdzeń, dotyczących tej małej klasy (to znaczy całej naszej Arytmetyki i Algebry), nie opierając się na żadnej zasadzie nie objętej logiką.

Metoda ta jest oczywiście przeciwna wszelkiej zdrowej psychologii; nie tak z pewnością postępował umysł ludzki, gdy budował Matematykę; to też autorzy jej nie zamierzają, jak mniemam, wprowadzić jej do nauczania średniego. Ale czy jest ona przynajmniej logiczna, albo, mówiąc trafniej, czy jest poprawna? Wolno jest o tem wątpić".

Warto zaznaczyć, że ta zwalczana właśnie przez Poincarégo metoda rozpoczynania wykładu Matematyki elementarnej znajduje się między innemi w Encyklopedyi matematyki elementarnej Webera

---

[1]) Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig 1888.

[2]) Nauka i Metoda. Cytuję według przekładu M. H. Horwitza. Warszawa 1911, Str. 108.

i Wellsteina[1]), dziele posiadającem zresztą wielkie zalety i godnem polecenia, zwłaszcza do użytku nauczycieli.

Co się tyczy cytowanej wyżej rozprawy Dedekinda, to nie miał on bynajmniej zamiaru robienia z niej użytku przy nauczaniu: jest to raczej traktat filozoficzny, mający na celu wykazanie, że pojęcie liczby jest wolnym tworem ludzkiego umysłu, niezależnym od pojęcia przestrzeni i czasu.

Godną zaznaczenia jest jednak owa skłonność umysłu ludzkiego do posiłkowania się nieskończonością przy badaniu skończoności. Czyż też nie na to został stworzony cały Rachunek nieskonczonostkowy, aby nam ułatwić badanie rzeczy skończonych? Tak np. dla obliczenia objętości jakiejś bryły skończonej, rozbijamy ją w Rachunku całkowym na nieskończenie wiele nieskończenie małych części i to nam ułatwia zadanie! „Es muss auch dem menschlichen Verstand das Prädicat «unendlich» in gewissen Rücksichten zugestanden werden", powiada Cantor[2]).

9. Zbiory nieskończone, które nie są przeliczalne, nazywać będziemy zbiorami nieprzeliczalnemi. Że zbiory takie istnieją, wynika już stąd, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, leżących wewnątrz przedziału (0, 1) jest zbiorem nieskończonym różnej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych (Rozdz. I, art. 11).

Niech U oznacza jakikolwiek zbiór nieprzeliczalny, zaś A — jakikolwiek zbiór przeliczalny, bedący częścią zbioru U. Połóżmy

$$U - A = U_1.$$

Zbiór U_1 będzie oczywiście nieskończony, gdyż w razie jego skończoności, z równości

$$U = A + U_1$$

wypadłoby, że U jest zbiorem przeliczalnym, wbrew założeniu. Oznaczając przez $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}_1$ odpowiednie liczby kardynalne, będziemy oczywiście mieli:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u}_1,$$

a że, jak wiemy (art. 7):

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_1,$$

---

[1]) Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. Leipzig 1906, Rozdział I.

[2]) Mathematische Annalen Bd. 21, p. 557.

(gdyż $\mathfrak{n}_1$ jest liczbą pozaskończoną), więc:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1,$$

skąd

$$U - A \sim U.$$

Zatem nie zmienimy mocy zbioru nieprzeliczalnego, usuwając z niego przeliczalną mnogość elementów.

10. Weźmy teraz pod rozwagę dany ciąg nieskończony

$$M_1, M_2, M_3, \ldots,$$

którego wyrazami M_n są pewne zbiory, nie posiadające wspólnych elementów.

Utwórzmy zbiór M, któryby zawierał wszystkie elementy każdego ze zbiorów M_n, ale prócz nich nie zawierał żadnego innego elementu. Zbiór taki określony będzie w zupełności przez warunki:

1-o. Każdy element zbioru M jest elementem jednego ze zbiorów M_n.

2-o. Każdy element każdego ze zbiorów M_n jest elementem zbioru M.

Naturalnem będzie taki zbiór M nazywać sumą wszystkich zbiorów M_n, pisząc

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots, \quad \text{albo:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = M.$$

Oczywistem jest, że taka nieskończona suma zbiorów posiada własność przemienności i łączności składników (podobnie jak bezwzględnie zbieżne szeregi liczb). Jasnem jest też, że jeżeli każdy ze zbiorów M_n zastąpimy odpowiednio przez zbiór M'_n równej mu mocy, to suma M' nowych zbiorów będzie zbiorem równej mocy ze zbiorem M.

Niech, dalej, $\mathfrak{m}_n$ oznacza liczbę kardynalną, odpowiadającą zbiorowi M_n zaś $\mathfrak{m}$ liczbę kardynalną, odpowiadającą zbiorowi M. Nazywać będziemy liczbę $\mathfrak{m}$ sumą nieskończonego szeregu liczb $\mathfrak{m}_n$, pisząc

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots, \quad \text{albo:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}.$$

Z uwag powyższych wynika, że każdy szereg nieskończony liczb kardynalnych posiada oznaczoną w zupełności sumę, niezależną od porządku i ugrupowania składników.

11. Jako **przykład** szeregu nieskończonego liczb kardynalnych obliczymy sumę

$$\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3 + \ldots,$$

gdzie każdy ze składników $\mathfrak{c}_n$ oznacza liczbę kardynalną skończoną.

W tym celu weźmy ciąg nieskończony zbiorów skończonych

$$E_1, E_2, E_3, \ldots,$$

gdzie E_n jest zbiorem, złożonym z $\mathfrak{c}_n$ elementów.

Wypiszmy (w jakimś oznaczonym porządku) wszystkie $\mathfrak{c}_1$ elementów zbioru E_1, po nich wszystkie elementy zbioru E_2 (w liczbie $\mathfrak{c}_2$), dalej wszystkie elementy zbioru E_3 i t. d. Otrzymamy w ten sposób oczywiście pewien ciąg nieskończony, złożony ze wszystkich elementów zbioru przeliczalnego

$$A = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

i tylko z tych elementów.

Wynika stąd natychmiast, że

$$\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3 + \ldots = \mathfrak{a}.$$

Weźmy teraz pod rozwagę ciąg nieskończony, zbiorów przeliczalnych

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Wypiszmy kolejno elementy każdego zbioru w formie ciągów nieskończonych:

$$\begin{array}{lccccc}
A_1) & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \ldots \\
 & / & / & / & & \\
A_2) & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \ldots \\
 & / & / & & & \\
A_3) & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \ldots \\
 & / & & & & \\
A_4) & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Otrzymamy w ten sposób pewien ciąg podwójny $a_{m,n}$.

Wszystkie wyrazy takiego ciągu łatwo ustawić w ciąg zwykły, zapomocą tak zwanej „metody przekątnych“.

Wypisujemy najprzód wyraz $a_{1,1}$, w którym suma obu wskaźników jest równa liczbie 2, dalej dwa wyrazy $a_{2,1}$ i $a_{1,2}$, w których suma ta wynosi 3, następnie trzy wyrazy $a_{3,1}$, $a_{2,2}$, $a_{1,3}$ dla których $m+n = 4$ i t. d., porządkując każdą grupę według malejących pierwszych wskaźników.

Otrzymamy w ten sposób określony w zupełności ciąg nieskończony

$$a_{1,1}\ a_{2,1}\ a_{1,2}\ a_{3,1}\ a_{2,2}\ a_{1,3}\ a_{4,1}\ a_{3,2}\dots,$$

złożony ze wszystkich elementów zbioru

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

Wnosimy stąd natychmiast, że

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \dots = \mathfrak{a}.$$

Jako natychmiastowy wniosek z otrzymanych wyników, dostajemy twierdzenie:

Z b i ó r p r z e l i c z a l n y z b i o r ó w s k o ń c z o n y c h l u b p r z e l i c z a l n y c h j e s t p r z e l i c z a l n y.

12. Użyta w poprzednim art. metoda przekątnych pozwala zarazem ustalić odpowiedniość doskonałą między zbiorem wszystkich układów

$$(l, m)$$

dwóch liczb naturalnych l i m (przyczem za układy różne uważamy i takie, które różnią się tylko porządkiem swych elementów) a zbiorem wszystkich numerów n. Odpowiedniość tę możnaby nawet wyrazić wzorami. Zapomocą bardzo prostego obliczenia czytelnik znajdzie np., że

$$n = \frac{(l+m-1)\ (l+m)}{2} - l + 1$$

—wzór, który pozwala z łatwością wyznaczać numer, odpowiadający danemu układowi. Trudniej już byłoby wyrazić l i m w zależności od n.

Podamy tu jeszcze inny sposób ponumerowania wszystkich układów (l, m).

Powiadam, że w s z y s t k i e u k ł a d y (l, m) d w ó c h l i c z b n a t u r a l n y c h z o s t a n ą p o n u m e r o w a n e w s p o s ó b j e d n o - j e d n o z n a c z n y, j e ż e l i k a ż d e m u u k ł a d o w i (l, m) p o d p o r z ą d k u j e m y n u m e r

$$N = 2^{l-1}\,(2m-1).$$

Dla dowodu wystarczy oczywiście okazać, że wypisane przed chwilą równanie, przy każdem danem naturalnem N posiada w liczbach naturalnych l i m jedno i tylko jedno rozwiązanie. Jest to jednak jasne, gdyż na to, iżby uważana równość (przy naturalnych l i m) zachodziła, potrzeba i wystarcza, aby liczba $2m - 1$ była największym nieparzy-

stym dzielnikiem liczby N, zaś liczba 2^{l-1} — największą potęgą dwójki (nie wyłączając zerowej), przez którą N jest podzielne.

Mamy tu więc zarazem sposób obliczania liczb l i m przy danem N. Np. dla $N = 1000$ znajdujemy z łatwością: $l=4$, $m = 63$; dla $N = 257$ będziemy mieli $l = 1$, $m = 129$.

Ustawiając nasze układy w ciąg nieskończony według ich kolejnych numerów, otrzymalibyśmy ciąg:

$$(1,1)\ (2,1)\ (1,2)\ (3,1)\ (1,3)\ (2,2)\ (1,4)\ (4,1)\ (1,5)\ (2,3)\ \ldots$$

13. Jako zastosowanie twierdzenia z art. 11-go udowodnimy, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

Niech

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$$

oznacza jakikolwiek ciąg skończony o wyrazach wymiernych. Przedstawimy każdy jego wyraz w_k w postaci ułamka nieprzywiedlnego $\frac{p_k}{q_k}$ o naturalnym mianowniku.

Połóżmy

$$|p_1| + |p_2| + \cdots + |p_n| + q_1 + q_2 + \cdots + q_n = N$$

—będzie to pewna liczba naturalna, wyznaczona w zupełności przez uważany ciąg. Ciąg nasz zaliczymy do N-tej klasy.

Jasnem jest, że w ten sposób każdy ciąg skończony o wyrazach wymiernych będzie należał do pewnej klasy i że zbiór wszystkich tych klas jest przeliczalny. Wystarczy więc, wobec tw. z art. 11-go, udowodnić, że w każdej klasie będziemy mieli skończoną liczbę ciągów.

Z uwagi, że wszystkie q_k są liczbami naturalnemi, zaś wszystkie $|p_k|$ nieujemnemi, wynikają natychmiast, wobec wzoru na N, nierówności:

$$N \geqslant n,\ N \geqslant q_k,\ N > |p_k|\ ,$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

Pierwsza nierówność dowodzi, że ciągi N-tej klasy zawierają nie więcej, niż N wyrazów; dwie pozostałe nierówności — że licznik i mianownik każdego z tych wyrazów mogą przyjmować tylko skończoną liczbę różnych wartości. A więc i liczba wszystkich ciągów N-tej klasy musi być skończona (jak łatwo obliczyć, mniejsza od $(2N^2)^N$).

Jako natychmiastowy wniosek z udowodnionego twierdzenia otrzymujemy:

Zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach całkowitych jest przeliczalny.

Stąd też:

Zbiór wszystkich wielomianów całkowitych jednej zmiennej o spółczynnikach całkowitych jest przeliczalny. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że każdemu takiemu wielomianowi

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

odpowiada pewien ciąg skończony o wyrazach całkowitych

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$$

—i naodwrót.

Ciekawe zastosowanie ostatniego twierdzenia wyprowadzimy w następnym artykule.

14. Liczbą algebraiczną nazywamy, jak wiadomo, każdy pierwiastek równania algebraicznego o spółczynnikach całkowitych (Możnaby też powiedzieć: o spółczynnikach wymiernych, gdyż każde takie równanie daje się w jednej chwili sprowadzić do równania o spółczynnikach całkowitych).

Jeżeli więc ξ jest liczbą algebraiczną, to musi istnieć (przynajmniej jeden) wielomian

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

o spółczynnikach całkowitych, który dla x równego ξ staje się zerem (t. j. $f(\xi) = 0$). Jeżeli n jest najniższym stopniem takich wielomianów, to nazywamy ξ liczbą algebraiczną stopnia n-tego. Jasnem jest, że każda liczba algebraiczna ma swój oznaczony stopień. (Np. wszystkie liczby wymierne będą liczbami algebraicznemi pierwszego stopnia; liczby: $\sqrt{2}$, $i = \sqrt{-1}$, $1 + \sqrt{5}$ — będą liczbami algebraicznemi drugiego stopnia i t. p.).

Dowodzi się w Algebrze (i to środkami całkiem elementarnemi), że żadne równanie n-tego stopnia nie może posiadać więcej niż n różnych pierwiastków; wynika stąd, że każde takie równanie wyznacza skończony zbiór liczb algebraicznych. A że zbiór wszystkich wielomianów całkowitych jednej zmiennej o spółczynnikach całkowitych jest przeliczalny (art. 13), więc przeliczalnym też będzie zbiór odpowiednich równań.

Możemy je więc ustawić w pewien ciąg nieskończony:

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0, \ldots$$

Wypiszmy teraz wszystkie pierwiastki równania $f_1 = 0$ (porządkując je np. według malejących części rzeczywistych, a w razie równych części rzeczywistych—według malejących spółczynników przy jednostce urojonej), następnie w ten sam sposób pierwiastki równania $f_2 = 0$, po nich pierwiastki równania $f_3 = 0$ i t. d.

W otrzymanym w ten sposób ciągu nieskończonym liczb algebraicznych zachowajmy tylko te wyrazy, które nie są równe żadnemu z poprzedzających je wyrazów. Otrzymamy ciąg nieskończony

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

złożony ze wszystkich a przytem różnych liczb algebraicznych (że ciąg ten musi być nieskończony wynika, już z uwagi, że w każdym razie będą w nim zawarte wszystkie liczby wymierne).

Dowiedliśmy więc, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Wszystkie liczby algebraiczne przedziału (0,1) będą też tworzyły zbiór przeliczalny (jako zbiór nieskończony, będący częścią przeliczalnego). Usuńmy je wszystkie z nieprzeliczalnego, jak wiemy (Rozdz. I, art. 11) zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0,1): nie zmienimy przez to, jak wiadomo (art. 9), mocy tego ostatniego, skąd wniosek:

W przedziale (0,1) istnieje nieprzeliczalny zbiór liczb, które nie spełniają żadnego równania algebraicznego o spółczynnikach całkowitych.

Liczby takie nazywamy przestępnemi. Dowiedliśmy więc, że istnieją liczby przestępne, a nawet, że w przedziale (0,1) mamy ich mnogość nieprzeliczalną.

Powyższy dowód istnienia liczb przestępnych zawdzięczamy Cantorowi, który go ogłosił w r. 1873[1]). (Praca, w której się ten dowód zawiera, jest jedną z pierwszych prac z Teoryi mnogości).

W tymże roku Hermite dowiódł, że liczba e—zasada logarytmów naturalnych—jest przestępną, dając przez to prosty przykład takich liczb. W niespełna dziesięć lat później Lindemann dowiódł, że i liczba π jest przestępna, a co zatem idzie, że kwadratura koła nie jest wykonalna zapomocą cyrkla i liniału[2]).

Na innej zupełnie zasadzie jest oparty, wcześniejszy od Cantorowego dowód Liouville'a, że istnieją liczby przestępne[3]). Posta-

[1]) Journal für reine u. ang. Mathematik, Bd. 77.

[2]) Mathematische Annalen. Bd. 20 (1892).

[3]) Journal de mathématiques 16 (1851).

ramy się w następnym artykule dowód ten jak najelementarniej przedstawić. Jest on ciekawy z tego względu, że daje możność podania bezpośrednio pewnego nieprzeliczalnego zbioru liczb przestępnych, określonych arytmetycznie wzorem nader prostym.

15. Wyprowadzimy przedewszystkiem pewne wnioski z założenia, że dana liczba ξ jest liczbą algebraiczną n-tego stopnia, gdzie $n > 1$.

Z założenia naszego wynika, że istnieje wielomian całkowity n-tego stopnia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad (a_0 \neq 0),$$

o spółczynnikach całkowitych i taki, że

$$f(\xi) = 0.$$

Niech, dalej, $\frac{p}{q}$ oznacza jakikolwiek dany ułamek o naturalnym mianowniku (może to być nawet ułamek przywiedlny), byleby taki, iż

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| \leqslant 1. \tag{7}$$

Powiadamy przedewszystkiem, że $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.

Załóżmy dla dowodu, że $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Mielibyśmy wtedy przy wszelkiem x:

$$f(x) = f(x) - f\left(\frac{p}{q}\right) = (a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n) - \left(a_0 \frac{p^n}{q^n} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n\right) = a_0 \left(x^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + \ldots + a_{n-2}\left(x^2 - \frac{p^2}{q^2}\right)$$
$$+ a_{n-1}\left(x - \frac{p}{q}\right) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \frac{\varphi(x)}{q^{n-1}} \text{ *)},$$

gdzie $\varphi(x)$ jest wielomianem o spółczynnikach całkowitych, stopnia $n-1$ (gdyż wyrazem z najwyższą potęgą przy x jest $q^{n-1} a_0 x^{n-1}$).

W otrzymanej tożsamości

$$f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \frac{\varphi(x)}{q^{n-1}}$$

połóżmy $x = \xi$: dostaniemy

$$\left(\xi - \frac{p}{q}\right) \frac{\varphi(\xi)}{q^{n-1}} = 0.$$

---

*) Względem każdej z różnic $x^k - \frac{p^k}{q^k}$ zastosowaliśmy tu oczywiście znaną tożsamość: $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + x y^{k-2} + y^{k-1})$.

Lecz pierwszy czynnik nie jest zerem, gdyż ξ jest, jak zakładamy, liczbą algebraiczną stopnia wyższego niż pierwszy ($n > 1$); nie jest również $\varphi(\xi) = 0$, gdyż wtedy liczba ξ spełniałaby pewne równanie o spółczynnikach całkowitych stopnia n—1-go, co niemożliwe, skoro ξ jest liczbą algebraiczną stopnia n-tego.

Założenie, że $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, doprowadziło nas zatem do sprzeczności.

Jest więc

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \neq 0.$$

Lecz oczywiście

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{| a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n |}{q^n} = \frac{A}{q^n},$$

gdzie A jest liczbą całkowitą nieujemną, a nie mogącą też być zerem, skoro $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Musi więc być A liczbą naturalną, zatem:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{A}{q^n} \geqslant \frac{1}{q^n}. \tag{8}$$

Z drugiej strony, wobec $f(\xi) = 0$, mamy:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi) \right| = \left| \frac{p}{q} - \xi \right| \cdot \left| F\left(\frac{p}{q}\right) \right|,$$

gdzie, podobnie, jak wyżej, znajdziemy, że

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha_0 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \alpha_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} \frac{p}{q} + \alpha_{n-1}$$

jest oznaczonym w zupełności wielomianem stopnia $n-1$, o spółczynnikach niezależnych ani od p, ani od q (lecz jedynie od liczby ξ i od spółczynników wielomianu f).

Z nierówności (7) wynika, że jeżeli obierzemy jako G liczbę, większą jednocześnie od $| \xi + 1 |$ i od $| \xi - 1 |$, to będzie

$$\left| \frac{p}{q} \right| < G.$$

Oznaczmy

$$| \alpha_0 | G^{n-1} + | \alpha_1 | G^{n-2} + \ldots + | \alpha_{n-1} | G + | \alpha_n | = M;$$

będzie więc oczywiście

$$\left| F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < M,$$

zatem

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{p}{q} - \xi \right| . \left| F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \left| \frac{p}{q} - \xi \right| . M,$$

co, wobec nierówności (8), daje:

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{M\, q^n}.$$

Jeżeli więc do warunku (7) dodamy jeszcze warunek

$$q > M, \tag{9}$$

to będzie oczywiście

$$\frac{1}{M\, q^n} > \frac{1}{q^{n+1}},$$

zatem

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{q^{n+1}}. \tag{10}$$

Nierówność ta zachodzi zatem dla wszelkiej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$ (o naturalnym mianowniku), spełniającej warunki (7) i (9). Ale, jeżeli warunek (7) nie jest spełniony, czyli jeżeli

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > 1,$$

to tembardziej mamy nierówność (10) (gdyż $q^{n+1} \geqslant 1$): nierówność ta spełniona będzie zatem przez każdą bez wyjątku liczbę wymierną o mianowniku większym od M.

Dowiedliśmy więc następującego ciekawego twierdzenia: *Jeżeli ξ jest liczbą algebraiczną stopnia n-tego ($n > 1$), to istnieje taka liczba M (zależna jedynie od ξ), że nierówność*

$$q > M$$

pociąga za sobą stale nierówność

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{q^{n+1}},$$

dla wszelkiej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$.

Wniosek. *Każda liczba ξ, określona szeregiem nieskończonym*

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots, \tag{11}$$

gdzie α_i są cyframi układu dziesiętnego—przyczem nieskończenie wiele z nich jest różnych od zera—jest liczbą przestępną.

(Liczba ξ ma się więc rozwijać na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony

$$\xi = 0, \alpha_1\, \alpha_2\, 000\, \alpha_3\, 00000000000000000\, \alpha_4\, 0 \ldots).$$

Dowód. Załóżmy, wbrew twierdzeniu, że ξ jest liczbą algebraiczną, niech n oznacza jej stopień. Oznaczmy przez k jakąkolwiek liczbę naturalną, większą od n, i połóżmy

$$\frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \ldots + \frac{\alpha_k}{10^{k!}} = \frac{p}{10^{k!}} = \frac{p}{q};$$

będzie oczywiście

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{\alpha_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \frac{\alpha_{k+2}}{10^{(k+2)!}} + \ldots$$

ułamkiem dziesiętnym z pierwszą, różną od zera, cyfrą najbliżej na $(k+1)!$ miejscu: ułamek ten przedstawiać więc będzie liczbę (dodatnią) nie większą od $\frac{1}{10^{(k+1)!-1}}$.

Stąd widać, że będzie

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{10^{(k+1)!-1}}.$$

Lecz dla $k > n$, czyli $k \geqslant n+1$, mamy oczywiście:

$$10^{(k+1)!-1} = 10^{k!\,k+(k!-1)} > 10^{k!\,k} = q^k \geqslant q^{n+1}.$$

Będzie więc:

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}. \tag{12}$$

Ułamek dziesiętny na ξ jest oczywiście nieokresowy: jest to więc liczba algebraiczna stopnia $n > 1$: w myśl udowodnionego twierdzenia istnieć więc będzie takie M, że dla $q > M$ będzie stale

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{n+1}}. \tag{13}$$

Obierając k tak wielkie, aby były spełnione jednocześnie warunki

$$k > n, \text{ oraz } 10^{k!} > M,$$

mielibyśmy dla jednej i tej samej liczby $\frac{p}{q}$ jednocześnie nierówności (12) i (13), które są oczywiście sprzeczne.

Liczba ξ nie może więc być algebraiczna.

Liczby, określone wzorem (11), są zatem wszystkie przestępne. Łatwo okazać, że zbiór ich jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1). Aby tego dowieść, a zarazem ustalić odnośne podporządkowanie jedno-jednoznaczne, wystarczy zauważyć, że każdej liczbie ξ, określonej wzorem (11), odpowiada oznaczony w zupełności ułamek dziesiętny, istotnie nieskończony

$$\eta = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$$

—a więc pewna liczba rzeczywista przedziału (0, 1)—i naodwrót.

Wzór (11) wyznacza więc całą nieprzeliczalną klasę liczb przestępnych. Prosty przykład liczby uważanej klasy otrzymamy np. kładąc $\alpha_n = 1$, dla $n = 1, 2, \ldots$ Liczba

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000000000000000001 0\ldots$$

nie spełnia zatem żadnego równania algebraicznego o spółczynnikach wymiernych.

Zbiór liczb, określonych wzorem (11), posiada jeszcze różne inne własności, ciekawe z punktu widzenia Teoryi mnogości, jak to później zobaczymy.

ROZDZIAŁ III.

Zbiory uporządkowane.

1. Niech (Z) oznacza zbiór dany. Utwórzmy wszystkie możliwe układy (a, b) elementów naszego zbioru (uważając za różne układy i takie, które się różnią tylko porządkiem swoich wyrazów); zbiór tych układów oznaczmy przez (U).

Niech dalej (R) oznacza jakąkolwiek daną część zbioru (U): będzie to więc jakikolwiek dany zbiór układów (a, b). Będziemy mówili, że zbiór (R) określa pewna względność (relatio) dla elementów zbioru (Z). O dwóch danych elementach a i b zbioru (Z) będziemy mówili, że a jest we względności R do b, pisząc

$$a R b$$

w tym i tylko w tym razie, jeżeli układ (a, b) należy do zbioru (R).

(Może się, oczywiście, dla danych elementów a, b zdarzyć, że a jest we względności R do b, ale b nie jest we względności R do a, gdyż z dwóch układów (a, b) i (b, a) może pierwszy należeć, a drugi nie należeć do zbioru (R)).

Daną względność R nazywamy symetryczną, jeżeli wzór

$$a R b$$

pociąga za sobą zawsze wzór

$$b R a.$$

Względność, która nie jest symetryczna, nazywamy niesymetryczną. Jeżeli nadto dla żadnego układu (a, b) zbioru (U) nie mamy jednocześnie

$$a R b \quad \text{oraz} \quad b \bar{R} a,$$

to uważaną względność nazywamy asymetryczną.

Przykłady.

1) Jeżeli w zbiorze wszystkich liczb naturalnych, $a R b$ oznacza: a jest podzielne przez b, to względność ta jest niesymetryczna: gdyż mamy $6 R 3$, ale nie mamy $3 R 6$, natomiast mamy jednocześnie $a R b$ oraz $b R a$ dla $a = b = 5$.

2) Jeżeli w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich aRb oznacza: a jest dwa razy większe od b, to względność ta jest asymetryczna, gdyż jeżeli $a = 2\,b$, to nie może już być $b = 2\,a$, skoro $a > 0$.

Podobnież, jeżeli w zbiorze wszystkich ludzi $a R b$ oznacza: a jest ojcem dla b, to względność ta jest asymetryczna.

3) Jeżeli, w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $a R b$ oznacza: a jest odwrotnością liczby b, to względność ta jest symetryczna, gdyż wzór $a = \frac{1}{b}$ pociąga za sobą zawsze wzór $b = \frac{1}{a}$.

O danej względności R mówimy, że jest przechodnia (relatio transitiva), jeżeli wzory

$$a R b, \quad b R c$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$a R c.$$

Przykłady.

4) Jeżeli, w zbiorze wszystkich liczb naturalnych $a R b$ oznacza: a jest podzielne przez b, to względność ta jest przechodnia.

Podobnież, względnosć $a > b$ jest przechodnia.

5) Jeżeli w zbiorze liczb rzeczywistych $a R b$ oznacza a jest dwa razy większe od b, to względność ta nie jest przechodnia.

Podobnież, jeżeli w zbiorze liczb naturalnych $a R b$ oznacza: a jest pierwsze względem b, to względność ta nie jest przechodnia, gdyż mamy np. $2 R 3$, $3 R 4$, ale nie mamy $2 R 4$.

Oznaczmy teraz symbolem $({}^cR)$ zbiór wszystkich układów (b, a), które otrzymamy ze zbioru (R), zmieniając w każdym jego układzie porządek wyrazów (znaczek ^{c} oznacza pierwszą literę słowa conversio). Względność ${}^cR$, określoną przez zbiór $({}^cR)$, nazywać będziemy względnością odwrotną dla R, albo odwróceniem względności R.

Jasnem jest, że każda względność posiada swoją oznaczoną w zupełności względność odwrotną i że względnością odwrotną dla odwrotnej jest względność dana.

Z definicyi względności odwrotnej wynika też, że wzory

$$aRb \quad \text{oraz} \quad b^{c}Ra$$

są równoważne.

Jako przykłady względności odwrotnych, możemy podać względności: $a > b$ oraz $b < a$, albo względności: być dzielnikiem oraz być wielokrotnością.

Oznaczmy teraz przez (R') zbiór, który pozostanie, jeżeli ze zbioru (U) usuniemy wszystkie układy, należące do zbioru (R), zaś przez R' oznaczmy względność, określoną przez zbiór (R').

Z dwóch wzorów

$$aRb \quad \text{oraz} \quad aR'b$$

zawsze jeden będzie prawdziwy, a drugi fałszywy.

Z tego względu nazywamy względność R' negacyą względności R. Jasnem jest, że każda względność posiada swoją negacyę i że odwrócenie negacyi jest identyczne z negacyą odwrócenia.

Załóżmy teraz, że dla elementów danego zbioru (Z) określone są dwie względności: R i S. Utwórzmy zbiór układów (T), zaliczając do niego dany układ (a, b) w tym i w tym tylko razie, jeżeli istnieje taki element c zbioru (Z), iż

$$aRc \quad \text{oraz} \quad cSb.$$

Względność (T) nazywamy iloczynem względnym (produit relatif) względności R przez względność S i piszemy:

$$T = R * S.$$

Iloczyn względny względności może nie posiadać własności przemienności czynników. Oto przykład:

Niech (Z) oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych n, (R) — zbiór wszystkich układów $(2n, n)$, wreszcie (S)—zbiór wszystkich układów $(n+1, n)$.

Wzór aRb oznacza zatem: liczba a jest dwa razy większa od liczby b, zaś wzór aSb oznacza: liczba a jest o jedność większa od liczby b. Połóżmy $R * S = T$, $S * R = Q$.

Wzór aTb, jak łatwo widzieć, oznaczać będzie równość: $a = 2(b+1)$, zaś wzór aQb—równość $a = 2b + 1$. Względności T i Q są tu więc różne.

Powiadamy, że względność R_1 jest zawarta we względności R_2, jeżeli zbiór (R_1) jest częścią zbioru (R_2), innemi słowy, jeżeli wzór

$$aR_1b$$

pociąga za sobą zawsze wzór

$$a R_2 b.$$

Przykład: Względność: liczba a jest podzielna przez $2b$ jest zawarta we względności: liczba a jest podzielną przez b.

Dwie względności, zawarte wzajemnie jedna w drugiej, są oczywiście identyczne (przynajmniej z punktu widzenia Teoryi mnogości).

Sumą logiczną dwóch względności R_1 i R_2 nazywamy względność R, określoną przez zbiór układów $(R_1) + (R_2)$, t. j. przez zbiór wszystkich układów, należących bądź do (R_1), bądź do (R_2). Np. jeżeli aRb oznacza: $|a| = |b|$, aR_1b oznacza $a = b$, wreszcie aR_2b oznacza $a = -b$, to R jest sumą logiczną względności R_1 i R_2.

Iloczynem logicznym dwóch względności R_1 i R_2 nazywamy względność R, określoną przez zbiór (R) wszystkich układów, należących jednocześnie do (R_1) i do (R_2). Iloczyn logiczny należy odróżniać od iloczynu względnego.

Przykłady. Względność $a = b$ jest iloczynem logicznym względności $a \geqslant b$ oraz $a \leqslant b$. Podobnież, względność: a jest podzielne przez $6b$ jest iloczynem logicznym względności: a jest podzielne przez $2b$ oraz a jest podzielne przez $3b$.

2. Jeżeli liczba elementów danego zbioru (Z) jest skończona, to każdą względność dla elementów uważanego zbioru możemy określić zapomocą tabliczki, podobnej do tabliczki mnożenia Pytagorasa, wpisując w kratce, odpowiadającej danemu układowi (a, b) 1, jeżeli zachodzi względność aRb, oraz 0 w przypadku przeciwnym. (Łatwo obliczyć, że mnogość wszystkich możliwych względności, jakie można rozważać dla zbioru o n elementach, równa jest liczbie 2^{n^2}, przyczem zaliczyliśmy tu i przypadki skrajne, kiedy dana względność zachodzi między każdemi dwoma elementami uważanego zbioru, oraz kiedy względność ta nie zachodzi między żadnemi elementami tego zbioru).

Podobna metoda jest stosowalna jeszcze i wtedy, kiedy zbiór (Z) jest przeliczalny.

Ustawmy wszystkie elementy danego zbioru przeliczalnego (Z) w pewien ciąg nieskończony

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Zbiór (U) będzie się tu więc składał ze wszystkich układów

$$(a_m, a_n) = u_{m.n},$$

tworzących pewien ciąg podwójny.

Utwórzmy teraz ciąg podwójny $v_{m,n}$, kładąc

$$v_{m,n} = 1, \quad \text{jeżeli} \quad a_m R a_n$$

oraz:

$$v_{m,n} = 0$$

w przypadku przeciwnym.

Jasnem jest, że stosunek R wyznacza w zupełności ciąg podwójny $v_{m,n}$ i że naodwrót, każdy ciąg podwójny $v_{m,n}$ o wyrazach równych zeru lub jedności, wyznacza pewną względność dla elementów zbioru (Z).

Mnogość wszystkich różnych względności, jakie tylko można rozważać dla danego zbioru przeliczalnego (Z), jest więc równej mocy z mnogością wszystkich różnych ciągów podwójnych o wyrazach równych zeru lub jedności.

Lecz każdy ciąg podwójny możemy przekształcić na ciąg zwykły (Rozdz. II, art. 11), wystarczy więc wziąć pod rozwagę zbiór wszystkich ciągów zwykłych o wyrazach równych zeru lub jedności.

Podzielmy ten zbiór ciągów na dwie klasy, zaliczając do pierwszej klasy wszystkie te ciągi, w których liczba wyrazów równych jedności jest skończona, a do drugiej klasy wszystkie pozostałe ciągi.

Każdemu ciągowi pierwszej klasy podporządkujmy ułamek, który otrzymamy, biorąc zero jako całość i ogólnie, jako n-tą cyfrę po przecinku—n-ty wyraz naszego ciągu. W ten sposób ustalimy odpowiedniość jedno-jednoznaczną między zbiorem wszystkich ciągów pierwszej klasy a pewnym (jak łatwo widzieć, nieskończonym) zbiorem liczb wymiernych. Stąd natychmiastowy wniosek, że zbiór wszystkich ciągów pierwszej klasy jest przeliczalny.

Każdemu ciągowi c_n klasy drugiej podporządkujmy ułamek nieskończony dyadyczny (t. j. wyrażony w układzie dwójkowym):

$$(0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots)_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \ldots$$

Ułamek ten będzie istotnie nieskończony, gdyż, jak zakładamy, ciąg c_n zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Jak wiadomo, każda liczba rzeczywista dodatnia $\leqslant 1$ daje się—i to w jeden tylko sposób—rozwinąć na ułamek dyadyczny istotnie nieskończony (dowód taki sam, jak dla ułamków dziesiętnych). Powyższe podporządkowanie ustala zatem odpowiedniość doskonałą między drugą klasą naszych ciągów a zbiorem wszystkich liczb dodatnich $\leqslant 1$. Ten ostatni jest, jak wiemy, nieprzeliczalny: nie zmienimy zatem jego mocy (Rozdz. II, art. 9), dołączając pierwszą klasę naszych ciągów, która, jak dowiedliśmy, tworzy zbiór przeliczalny.

Stąd wniosek: zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach równych zeru lub jedności jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0—1).

A zatem też tej samej mocy jest mnogość wszystkich możliwych względności, jakie można rozważać dla elementów każdego danego zbioru przeliczalnego.

3. Załóżmy teraz, że dla danego zbioru (Z) określona jest względność R, przechodnia i przytem taka, iż dla każdych dwóch różnych elementów a i b uważanego zbioru zachodzi jeden i tylko jeden z dwóch wzorów:

$$a R b \quad \text{oraz} \quad b R a.$$

Będziemy mówili, że względność taka R wyznacza pewne uporządkowanie elementów zbioru (Z), albo że zbiór (Z) jest uporządkowany zapomocą względności R[1]).

Łatwo sprawdzić, że jeżeli względność R wyznacza pewne uporządkowanie zbioru (Z), to i względność odwrotna ${}^{c}R$ wyznacza również pewne inne uporządkowanie tegoż zbioru, które nazywać będziemy uporządkowaniem odwrotnem.

Jako specyalne symbole dla takich względności R oraz ${}^{c}R$ przyjęto symbole:

$$\lesssim \text{ oraz } \gtrsim ,$$

przyczem $a \lesssim b$ czytamy: a jest wcześniejsze od b, albo a poprzedza b, zaś $a \gtrsim b$ czytamy: a jest późniejsze od b, albo: a następuje po b.

Możemy więc też powiedzieć:

Dany zbiór nazywamy **uporządkowanym** (ordonné, geordnet), jeżeli co do każdej pary a, b różnych jego elementów zawarta jest umowa, wedle której jeden z tych elementów uważamy jako wcześniejszy od drugiego, co wyrażamy na piśmie $a \lesssim b$, dla oznaczenia, że a jest elementem wcześniejszym od b, lub $b \lesssim a$, dla oznaczenia, że b jest elementem wcześniejszym od a, i jeżeli nadto umowa ta jest tego rodzaju, iż ze związków

$$a \lesssim b, \quad b \lesssim c,$$

wynika zawsze

$$a \lesssim c$$

[1]) L. Couturat w „Les principes des Mathématiques“ (Paris 1905), p. 68—75, podaje aż sześć różnych sposobów wprowadzania pojęcia uporządkowania (na tle Teoryi względności).

Przykłady zbiorów uporządkowanych.

1) Zbiór wszystkich liczb wymiernych będzie uporządkowany, jeżeli umówimy się z dwóch jakichkolwiek jego elementów uważać ten za wcześniejszy, który jest mniejszy. Można jednak jeszcze na nieskończenie wiele innych sposobów uporządkować tę mnogość. W Rozdz. I (art. 9) ustawiliśmy w jeden ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne; możemy się teraz umówić, aby uważać z dwóch liczb wymiernych tę za wcześniejszą, która ma mniejszy numer porządkowy w powyższym ciągu: otrzymamy w ten sposób nowe uporządkowanie zbioru wszystkich liczb wymiernych.

2) Zbiór wszystkich liczb naturalnych, prócz zwykłego uporządkowania według wielkości, możemy jeszcze uporządkować np. w następujący sposób. Mając dwie dane liczby naturalne, rozwijamy je na czynniki pierwsze i uważamy tę za wcześniejszą, która ma mniej czynników, a w razie równej liczby czynników uważamy tę za wcześniejszą, która jest mniejsza.

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że taka umowa rzeczywiście porządkuje nasz zbiór. Będziemy tu mieli np.:

$$1 \lessdot 2 \lessdot 5 \lessdot 31 \lessdot 4 \lessdot 6 \lessdot 15 \lessdot 8 \lessdot 30 \lessdot 24.$$

3) Zbiór wszystkich liczb zespolonych można uporządkować w ten sposób. Kładziemy

$$a + bi \lessdot c + di,$$

jeżeli

$$a < c,$$

albo też jeżeli

$$a = c, \quad b < d.$$

Będzie więc np:

$$2 + 3i \lessdot 3 + 2i \lessdot 3 + 5i \lessdot 4 \lessdot 5 - 16i \lessdot 5.$$

4) Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wewnątrz przedziału (0,1), prócz zwykłego uporządkowania według wielkości, może być uporządwany jeszcze w następujący sposób. Rozwijamy dwie dane liczby x i x' na ułamki dziesiętne istotnie nieskończone i wyznaczamy pierwsze cyfry rozwinięć, które nie są odpowiednio równe. Niech to będą cyfry c_n i c'_n, znajdujące się na n-tych miejscach obu rozwinięć. Jeżeli teraz n jest wskaźnikiem nieparzystym, to przyjmiemy $x \lessdot x'$ dla $c_n < c'_n$ (oraz $x' \lessdot x$, dla $c_n > c'_n$); jeżeli zaś n jest wskaźnikiem parzystym, to przyjmiemy $x \lessdot x'$ dla $c_n > c'_n$ (oraz $x' \lessdot x$, dla $c_n < c'_n$). Pozo-

stawiamy czytelnikowi dowód, że umowa taka porządkuje nasz zbiór[1]).

4. Dwa zbiory uporządkowane G i Γ nazywamy podobnemi, jeżeli między elementami ich daje się ustalić tego rodzaju odpowiedniość doskonała, przy której związki między odpowiedniemi elementami w obu zbiorach mamy te same.

Jeżeli więc a i b są dwa jakiekolwiek elementy zbioru G, zaś α i β — odpowiednie elementy zbioru podobnego Γ, to związek

$$a \lesseqgtr b$$

stale pociąga za sobą związek

$$\alpha \lesseqgtr \beta$$

i naodwrót.

Łatwo widzieć, że każdy zbiór uporządkowany jest podobny samemu sobie, oraz że dwa zbiory podobne trzeciemu są podobne między sobą.

Podzielmy wszystkie zbiory uporządkowane na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy wszystkie zbiory podobne między sobą. Z każdej klasy wybierzmy po jednym zbiorze: będą to tak zwane typy porządkowe (types ordinaux, Ordnungstypen).

Wszystkie zbiory uporządkowane jednej i tej samej klasy w powyższym podziale, czyli jednego typu porządkowego, będą oczywiście równej mocy, ale nie naodwrót. Np. zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz zbiór wszystkich liczb wymiernych są równej mocy, ale ich typy porządkowe (przy uporządkowaniu według wielkości), są, jak łatwo widzieć, różne.

Oznaczmy, przez skrócenie, każdy typ porządkowy osobnym symbolem: symbole takie w teoryi zbiorów uporządkowanych grają rolę analogiczną z rolą liczb kardynalnych przy badaniu mocy zbiorów.

Niech n oznacza jakąkolwiek daną liczbę naturalną. Wszystkie zbiory uporządkowane, złożone z n elementów, będą, jak łatwo widzieć, podobne zbiorowi n pierwszych liczb naturalnych, wziętych w ich kolejnym porządku. Wskazanem więc będzie zbiór $(1, 2, 3, \ldots n)$, jako najprostszy zbiór uważanej klasy, przyjąć za odpowiedni typ porządkowy, zaś samą liczbę n — za odpowiedni symbol.

Z mnogości uporządkowanych pozaskończonych najprostszym typem będzie zbiór wszystkich liczb naturalnych (w ich kolejnym porządku). Typ ten

---

[1]) Porówn. definicyę ultracontinuum F. Bernsteina: Math. Annalen, Bd. 61 (1905), p. 152.

$$(1, 2, 3, \ldots)$$

oznaczać będziemy (według Cantora) symbolem ω.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych ujemnych (w porządku ich wielkości względnych) przedstawiać będzie inny typ:

$$(\ldots -3, -2, -1),$$

uporządkowany odwrotnie niż ω: oznaczać go będziemy symbolem $^*\omega$.

Ogólnie, jeżeli α oznacza dany typ porządkowy, to typ, uporządkowany odwrotnie, oznaczać będziemy symbolem $^*\alpha$. Może się oczywiście zdarzyć, iż $^*\alpha = \alpha$: tak jest np. dla każdego typu skończonego, tak jest również dla typu, odpowiadającego zbiorowi wszystkich liczb całkowitych (uporządkowanemu według ich wielkości względnych).

5. Niech G oznacza dany zbiór uporządkowany, a i b — dwa jakiekolwiek jego elementy, przyczem $a \lesssim b$.

O każdym elemencie m uważanego zbioru, spełniającym warunki:

$$a \lesssim m \lesssim b$$

będziemy mówili, że leży wewnątrz przedziału (a, b).

Jeżeli w danym zbiorze uporządkowanym wewnątrz każdego przedziału istnieje przynajmniej jeden element, to zbiór taki nazywamy wszędziegęstym (albo pantachią) (überall dichte Menge, ensemble partout dense). (Łatwo dowieść, że w takim razie wewnątrz każdego przedziału musi istnieć nieskończenie wiele elementów uważanego zbioru).

Przykłady. Zbiór 3) z art. 3-go jest wszędziegęsty, gdyż wewnątrz przedziału $(a + bi, c + di)$ znajduje się w każdym razie element $\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} i$, jak to czytelnik zechce bliżej rozpatrzyć.

Natomiast zbiór 2) z art. 3-go nie będzie wszędziegęsty, gdyż np. wewnątrz przedziału (3, 5) niema żadnego elementu.

Jeżeli w danym zbiorze uporządkowanym istnieje element, od którego niema wcześniejszych, to element taki nazywamy pierwszym elementem uważanego zbioru, a zam zbiór—ograniczonym zdołu. Jeżeli w danym zbiorze uporządkowanym istnieje element, od którego każdy inny jest wcześniejszy, to element taki nazywemy ostatnim, a sam zbiór—ograniczonym zgóry.

Twierdzenie. Wszystkie zbiory uporządkowane, które są przeliczalne, wszędziegęste i nie posiadają ani pierwszego ani ostatniego elementu, są podobne.

Niech U i V będą dwa zbiory, spełniające warunki naszego twierdzenia. Ustawmy wszystkie elementy zbioru U w ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

oraz wszystkie elementy zbioru V w ciąg nieskończony

$$v_1, v_2, v_3, \ldots$$

(Jest to możliwe, gdyż zbiory nasze są, jak zakładamy, przeliczalne).

Podporządkujmy elementowi u_1 zbioru U element v_1 zbioru V. Elementowi u_2 zbioru U podporządkujmy dalej pierwszy wyraz ciągu v_n, będący w tej samej względności do v_1, w jakiej u_2 jest do u_1 (to znaczy pierwszy wyraz ciągu v_n, późniejszy od v_1, jeżeli u_2 jest późniejsze od u_1, zaś pierwszy wyraz ciągu v_n, wcześniejszy od v_1, jeżeli u_2 jest wcześniejsze od u_1): wyraz ten oznaczmy przez v_{k_2}. Elementowi u_3 zbioru U podporządkujmy dalej pierwszy wyraz v_{k_3} ciągu v_n, będący w tych samych względnościach do v_1 i do v_{k_2}, w jakich odpowiednio są u_3 do u_1 i u_2. Ogólnie, elementowi u_m zbioru U podporządkujmy pierwszy wyraz v_{k_m} ciągu v_n, będący w tych samych względnościach do $v_1, v_{k_2}, \ldots, v_{k_{m-1}}$, w jakich są odpowiednio u_m do $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$.

Opierając się na założeniach naszego twierdzenia z łatwością możnaby okazać (co pozostawiamy czytelnikowi), że wyznaczenie wyrazu v_{k_m}, spełniającego powyższe warunki jest zawsze możliwe, dalej że ciąg

$$v_{k_1} = v_1, v_{k_2}, v_{k_3}, v_{k_4}, \ldots$$

conajwyżej porządkiem wyrazów różnić się będzie od ciągu v_n (a więc przedstawiać będzie zbiór V), i wreszcie, że stale związek

$$u_p \lessgtr u_q$$

pociągać będzie za sobą związek

$$v_{k_p} \lessgtr v_{k_q}$$

i naodwrót, skąd natychmiastowy wniosek o podobieństwie zbiorów U i V.

Istnieje więc jeden tylko typ porządkowy zbiorów, spełniających warunki naszego twierdzenia; jako ten typ możemy obrać zbiór wszystkich liczb wymiernych (uporządkowany według ich wielkości).

Jako ciekawy wniosek z naszego twierdzenia, otrzymujemy:

Zbiór wszystkich liczb wymiernych, zbiór wszystkich liczb wymiernych, leżących wewnątrz przedziału (0,1), zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych skończonych, zbiór wszystkich liczb algebraicznych (każdy z tych zbiorów uporządkowany według wielkości)—są podobne.

Twierdzenie. Każdy zbiór uporządkowany przeliczalny jest podobny pewnemu zbiorowi liczb wymiernych, uporządkowanych według wielkości.

Ustawmy w jeden ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne, zawarte wewnątrz przedziału (0, 1). Niech to będzie ciąg

$$w_1, w_2, w_3, \ldots$$

Ustawmy, dalej w jeden ciąg nieskończony wszystkie elementy danego zbioru uporządkowanego przeliczalnego U: niech to będzie ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Podporządkujmy elementowi u_1 liczbę wymierną w_1. Elementowi u_2 podporządkujmy pierwszy wyraz ciągu w_n, będący w tej samej względności do w_1, w jakiej jest element u_2 do u_1 i t. d., podobnie jak przy dowodzie poprzedzającego twiedzenia. Łatwo okazać, że w ten sposób otrzymamy pewien zbiór liczb wymiernych

$$w_1, w_{k_2}, w_{k_3}, \ldots,$$

podobny zbiorowi U.

6. Niech G oznacza dany zbiór uporządkowany, u_n — ciąg nieskończony elementów naszego zbioru, taki iż stale

$$u_n \lessdot u_{n+1}.$$

Ciąg taki nazywamy rosnącym. Weźmy pod rozwagę zbiór U wszystkich elementów zbioru G, które są późniejsze od każdego z wyrazów ciągu u_n (o ile takie elementy istnieją). Dla elementów zbioru U zachowajmy ten sam porządek, jaki mają w zbiorze G.

Jeżeli zbiór U posiada element pierwszy, to mówimy, że ciąg u_n posiada granicę: jeżeli u_ω jest pierwszym elementem zbioru U, to piszemy

$$\lim_{n=\infty} u_n = u_\omega.$$

Przykłady. W zbiorze 2) art. 3-go ciąg nieskończony kolejnych liczb pierwszych posiada granicę 4. Podobnież, ciąg kwadratów kolejnych liczb pierwszych posiada granicę 8.

W zbiorze 3) art. 3-go ciąg rosnący

$$i, 2i, 3i, 4i, \ldots$$

nie posiada granicy, gdyż zbiór wszystkich liczb zespolonych, późniejszych od każdego wyrazu wypisanego ciągu, istnieje, ale nie posiada elementu pierwszego.

W tymże zbiorze ciąg rosnący

$$1, 2, 3, \ldots$$

nie posiada granicy, gdyż niema żadnego elementu, późniejszego od każdego z wyrazów wypisanego ciągu.

Ciąg nieskończony u_n elementów danego zbioru uporządkowanego G nazywamy malejącym, jeżeli stale

$$u_{n+1} \lesssim u_n .$$

Jeżeli zbiór U wszystkich elementów zbioru G, które są wcześniejsze od każdego elementu u_n, posiada element ostatni u_ω, to znów piszemy

$$u_\omega = \lim_{n=\infty} u_n$$

i nazywają u_ω granicą ciągu u_n.

Ciągi rosnące i ciągi malejące nazywamy ciągami podstawowemi (Fundamentalreihe).

Element g zbioru G, będący granicą pewnego ciągu podstawowego, nazywamy elementem głównym zbioru G (Hauptelement, élément principal), albo jego elementem granicznym (Grenzelement, élément limite).

Zbiór uporządkowany, którego wszystkie elementy są elementami granicznemi, nazywamy w sobie gęstym (in sich dicht, dense en soi).

Zbiór, w którym każdy ciąg podstawowy posiada granicę, nazywamy zamkniętym (abgeschlossen, fermé).

Zbiór w sobie gęsty i zamknięty, nazywamy doskonałym (perfect).

Godnem jest podkreślenia, jak bardzo ogólnemi są powyższe pojęcia, odgrywające, jak wiadomo, tak ważną rolę w Analizie.

W szczególności, co się tyczy pojęcia granicy, widzimy, że dla definicyi jego nie jest wcale potrzebne pojęcie różnicy.

7. Nazywamy według Dedekinda przekrojem (Schnitt, coupure) każdy podział wszystkich elementów danego zbioru uporządkowanego G na dwie klasy A i B, takie, iż każdy element klasy A jest wcześniejszy od każdego elementu klasy B. Podział taki oznaczamy symbolem $[A, B]$.

Dla danego przekroju $[A, B]$ możliwe są tylko cztery następujące przypadki:

1) Klasa A posiada element ostatni, klasa B posiada element pierwszy. W tym przypadku mówimy, że zachodzi skok (Sprung).

2) Klasa A posiada element ostatni, klasa B nie posiada elementn pierwszego.

3) Klasa A nie posiada elementu ostatniego, klasa B posiada element pierwszy.

4) Klasa A nie posiada elementu ostatniego, klasa B nie posiada elementu pierwszego. W tym przypadku mówimy, że mamy lukę (Lücke).

Zbiór uporządkowany, nie posiadający skoków ani luk, nazywamy ciągłym.

Twierdzenie. Zbiór ciągły, posiadający element pierwszy i ostatni, jest zamknięty.

Dowód. Niech G oznacza zbiór, spełniający warunki naszego twierdzenia. Chcemy dowieść, że zbiór G jest zamknięty.

Niech u_n oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony rosnący elementów G. Utwórzmy w zbiorze G przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B wszystkie te elementy zbioru G, które są późniejsze od każdego z wyrazów ciągu u_n.

Zauważymy przedewszystkiem, że w klasie B znajdzie się conajmniej jeden element, mianowicie w każdym razie będzie do niej należał ostatni element zbioru G. W samej rzeczy, element ten, jako ostatni dla zbioru G, nie może być wcześniejszy od żadnego wyrazu ciągu u_n: nie może on też być żadnym z tych wyrazów, bo gdyby był wyrazem u_p, to byłby wcześniejszy od wyrazu u_{p+1}, skoro ciąg jest rosnący.

Jasnem jest dalej, że każdy wyraz ciągu u_n należy do klasy A — gdyż oczywiście nie może należeć do klasy B. Z definicyi uważanego przekroju wynika też natychmiast, że jeżeli g jest elementem zbioru G, należącym do klasy A, to istnieją wyrazy ciągu u_n, które są późniejszze od g: istnieją więc też wtedy elementy klasy A, późniejsze od g. Dowodzi to, że w klasie A niema elementu ostatniego. Ale, wobec przyjętej ciągłości zbioru G w klasie B musi wtedy istnieć element pierwszy: w myśl definicyi klasy B oraz definicyi granicy, będzie on granicą ciągu u_n.

Dowiedliśmy więc, że każdy ciąg nieskończony rosnący elementów zbioru G posiada granicę. Analogicznie dowiedlibyśmy, że każdy ciąg nieskończony malejący elementów zbioru G posiada granicę. Wszystkie ciągi podstawowe zbioru G posiadają zatem granicę, co dowodzi, że zbiór nasz jest zamknięty, c. b. d. o.

8. Niech G oznacza dany zbiór uporządkowany, H—jakąkolwiek daną część tego zbioru. Łatwo widzieć, że zbiór H będzie uporząd-

kowany, jeżeli pozostawimy dla jego elementów te same stosunki, jakie między niemi zachodzą w zbiorze G.

Zbiór H nazywamy wszędziegęstą częścią zbioru G, jeżeli między każdemi dwoma elementami zbioru G znajduje się przynajmniej jeden element zbioru H. Może się naturalnie zdarzyć, że H nie jest wszędziegęstą częścią danego zbioru G, gdy tymczasem zbiór H, uważany jako zbiór samoistny (niezależnie od zbioru G), jest wszędziegęsty.

Oto przykład: zbiór wszystkich liczb wymiernych, bezwzględnie większych od jedności, uważany jako zbiór samoistny, jest oczywiście wszędziegęsty (gdyż między każdemi dwoma elementami tego zbioru. znajduje się zawsze nieskończenie wiele innych elementów tegoż zbioru); natomiast ten sam zbiór nie jest wszędziegęstą częścią zbioru wszystkich liczb wymiernych (bo np. w przedziale 0—1 niema żadnego jego elementu).

Z drugiej strony jasnem jest, że jeżeli jakiś zbiór H jest wszędziegęstą częścią innego zbioru, to zbiór H, uważany jako samoistny, musi być wszędziegęsty.

Niech teraz G i G_1 będą dwa zbiory podobne: można więc, w myśl definicyi takich zbiorów (art. 4), ustalić między ich elementami podporządkowanie jedno-jednoznaczne, przy którem związki między odpowiedniemi elementami w obu zbiorach będą te same. Części H zbioru G będzie w tem podporządkowaniu odpowiadała jakaś część H_1 zbioru G_1: łatwo widzieć, że zbiory H i H_1 będą podobne.

Lemmat. Zbiór zamknięty, posiadający część przeliczalną wszędziegęstą, jest ciągły.

Dowód. Zbiór, posiadający część wszędziegęstą, sam jest oczywiście wszędziegęsty: nie może zatem posiadać skoków (art. 7). Dla dowodu naszego lemmatu wystarczy więc okazać, że zbiór, spełniający jego warunki, nie może posiadać luk.

Niech G oznacza dany zbiór zamknięty, H—jego część przeliczalną, wszędziegęstą. Utwórzmy jakikolwiek przekrój $[A, B]$ zbioru G. Przekrój ten wyznaczy nam zarazem odpowiedni przekrój $[M, N]$ części H: jasnem jest przytem, że M jest zbiorem wszystkich elementów zbioru H, należących do klasy A, zaś N — do klasy B. [1]) Przekrój $[M, N]$ nie może oczywiście dawać skoku, gdyż zbiór H jest wszędziegęstym.

---

[1]) Moglibyśmy tu nie mieć właściwego przekroju $[M, N]$ conajwyżej w tym razie, gdyby zbiór A lub B składał się z jednego tylko elementu (zbiór M lub N mógłby wtedy nie zawierać żadnego elementu, czyli być pustym). Jest to jednak wykluczone, jeżeli przekrój $[A, B]$ wyznacza lukę.

Gdyby w klasie M istniał element ostatni m, to element ten byłby zarazem ostatnim elementem klasy A. W samej rzeczy, w przeciwnym przypadku możnaby w klasie A znaleść element a późniejszy od m; ale wtedy, między elementami m i a zbioru G istniałby element m_1 zbioru H (jako części wszędziegęstej zbioru G): element ten należałby oczywiście do klasy A (gdyż $m_1 \lessdot a$), a więc też i do klasy M—wbrew założeniu, że m jest ostatnim elementem tej klasy.

Jeżeli zatem przekrój $[A, B]$ wyznacza lukę, to w klasie M niema elementu ostatniego.

Zbiór M, jako część zbioru H, jest przeliczalny (zbiór M jest oczywiście nieskończony, skoro nie posiada elementu ostatniego). Możemy więc ustawić wszystkie elementy zbioru M w pewien ciąg nieskończony

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

Oznaczmy przez m_{k_2} pierwszy wyraz naszego ciągu, późniejszy od m_1, przez m_{k_3} pierwszy jego wyraz, późniejszy od m_{k_2} i t. d. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony rosnący

$$m_{k_1} = m_1\,,\ m_{k_2}\,,\ m_{k_3}\,,\ \ldots$$

o wskaźnikach rosnących. Jasnem jest przytem, że element m_{k_n} jest późniejszy od każdego z elementów

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{k_n-1}\,.$$

Ponieważ, jak zakładamy, zbiór G jest zamknięty, więc ciąg podstawowy m_{k_n} musi posiadać granicę g: będzie to, w myśl definicyi (art. 6), pierwszy element zbioru G, późniejszy od każdego z wyrazów ciągu m_{k_n}.

Element g nie może należeć do klasy B, gdyż wtedy możnaby w klasie tej wyznaczyć element b, wcześniejszy od g (skoro klasa B nie nie posiada elementu pierwszego); między elementami b i g klasy B możnaby wyznaczyć dalej element ν zbioru H, należący oczywiście do klasy N: element ten, jako wcześniejszy od g, nie mógłby być późniejszy od każdego z wyrazów ciągu m_{k_n}, w czem tkwi sprzeczność, gdyż ν należy do klasy N, zaś wszystkie wyrazy ciągu m_{k_n} – do klasy M.

Element g musi zatem należeć do klasy A. W klasie tej możemy wyznaczyć element a poźniejszy od g, gdyż klasa A nie posiada elementu ostatniego. Między elementami g i a możemy dalej wyznaczyć element m zbioru H, należący oczywiście do klasy M, a więc będący jednym z wyrazów ciągu m_n .

Wyraz m, jako późniejszy od elementu g, byłby tembardziej późniejszy od każdego z wyrazów ciągu m_{k_n}, a przez to i od każdego z wyrazów

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{k_n},$$

przy wszelkiem n. Że zaś wskaźniki k_n stale i nieograniczenie wzrastają wraz z n, więc stąd wynika, że m jednak nie może być żadnym z wyrazów ciągu m_n.

Założenie, że przekrój $[A, B]$ wyznacza lukę, doprowadziło nas zatem do sprzeczności. Dowiedliśmy więc, że zbiór G nie posiada luk, a że nie posiada też skoków, więc jest ciągły, c. b. d. o.

Twierdzenie. Wszystkie zbiory zamknięte, posiadające część przeliczalną, wszędziegęstą, są podobne.

Dowód. Zauważymy przedewszystkiem, że jeżeli dany zbiór G posiada część przeliczalną, wszędziegęstą, mającą element pierwszy (względnie ostatni), to, odrzucając ten element, również otrzymamy przeliczalną, wszędziegęstą część zbioru G. Możemy więc założyć, że zbiór G posiada część przeliczalną, wszędziegęstą, nie mającą ani pierwszego ani ostatniego elementu.

Zauważymy dalej, że zbiór G, spełniający warunki naszego twierdzenia, musi posiadać element pierwszy i element ostatni. Ustawmy dla dowodu w jeden ciąg nieskończony h_n wszystkie elementy przeliczalnej, wszędziegęstej, nie mającej ostatniego elementu, części H zbioru G. Oznaczmy przez h_{k_2} pierwszy wyraz naszego ciągu, późniejszy od h_1, przez h_{k_3} — pierwszy jego wyraz, późniejszy od h_{k_2} i t. d.

Ciąg nieskończony h_{k_n} da się zbudować, gdyż zbiór H nie posiada elementu ostatniego. Otrzymamy w ten sposób ciąg rosnący h_{k_n}, który musi posiadać w zbiorze G granicę, skoro ten ostatni jest zamknięty. Łatwo widzieć, że ta granica g będzie elementem zbioru G, późniejszym od wszystkich elementów zbioru H, a stąd dalej wywnioskować natychmiast, że g będzie ostatnim elementem zbioru G. Podobnież dowiedlibyśmy, że zbiór G posiada element pierwszy.

Niech teraz G i G_1 będą dwa dane zbiory zamknięte, H i H_1 — odpowiednio ich części przeliczalne, wszędziegęste, nie posiadające ani pierwszego ani ostatniego elementu.

W myśl twierdzenia z art. 5-go, zbiory H i H_1 muszą być podobne. Możemy więc ustalić między ich elementami odpowiedniość jedno-jednoznaczną, przy której związki między odpowiedniemi elementami w obu zbiorach będą te same.

Załóżmy teraz, że g oznacza element zbioru G, nie należący do H. Jeżeli to jest element pierwszy zbioru G, to podporządkujmy mu element pierwszy zbioru G_1 (który oczywiście nie należy do H_1), jeżeli to jest element ostatni zbioru G, to podporządkujmy mu element ostatni zbioru G_1. Przypuśćmy teraz, że g nie jest ani pierwszym, ani ostatnim elementem zbioru G i nie należy do H. Utwórzmy w tym razie przekrój $[M, N]$ zbioru H, zaliczając do klasy M wszystkie jego elementy wcześniejsze od g, zaś do klasy N — wszystkie późniejsze. (Łatwo widzieć, że w każdej klasie będziemy mieli nieskończenie wiele elementów, skoro g nie jest ani pierwszym ani ostatnim elementem zbioru G). Zbiorowi M odpowiada w ustalonem wyżej podporządkowaniu pewien zbiór M_1, będący częścią zbioru H_1. Klasa M nie posiada elementu ostatniego (gdyż w razie istnienia takiego elementu m, moglibyśmy między m i g wyznaczyć nowy element μ zbioru H, należący oczywiście do M): klasa M_1—jako zbiór podobny zbiorowi M, nie może więc również posiadać elementu ostatniego. Utwórzmy teraz przekrój $[A_1, B_1]$ zbioru G_1, zaliczając do klasy B_1 wszystkie elementy późniejsze od każdego z elementów klasy M_1. Jeżeli a_1 jest elementem klasy A_1, to istnieją elementy klasy M_1, które nie są wcześniejsze od a_1: istnieją więc też w klasie M_1 elementy m_1 późniejsze od a_1, skoro M_1 nie posiada elementu ostatniego. Ale każdy element klasy M_1 jest oczywiście elementem klasy A_1: dowiedliśmy więc, że jeżeli a_1 jest elementem klasy A_1, to można w tejże klasie wyznaczyć element m_1, późniejszy od a_1. Wynika stąd, że klasa A_1 nie posiada elementu ostatniego.

Lecz zbiór G_1, jest, w myśl założenia, zamknięty i posiada część przeliczalną wszędziegęstą: jest więc zbiorem ciągłym — w myśl dowiedzionego lemmatu. Przekrój $[A_1, B_1]$ nie może więc dawać luki: skoro zatem klasa A_1 nie posiada elementu ostatniego, to klasa B_1 musi posiadać element pierwszy g_1. Element ten g_1 podporządkujmy elementowi g zbioru G.

W ten sposób każdemu elementowi zbioru G podporządkowaliśmy pewien element zbioru G_1. Czytelnik już dalej z łatwością udowodni, że podporządkowanie nasze będzie jedno-jednoznaczne i że związki między odpowiedniemi elementami w obu zbiorach będą te same. Zbiory nasze są więc podobne, c. b. d. o.

Definicya. Zbiór zamknięty, posiadający część przeliczalną wszędziegęstą, nazywamy **continuum** liniowem. Wszystkie continua liniowe są więc zbiorami podobnemi.

Mamy tu więc czysto porządkową definicyę continuum, niezależną ani od pojęcia liczby rzeczywistej, ani od pojęcia miary.

9. Jeżeli dany zbiór wszędziegęsty nie jest ciągły, to można go uzupełnić (czyli rozszerzyć) przez wprowadzenie nowych elementów, tak aby otrzymany w ten sposób nowy zbiór był ciągły.

Niech G oznacza dany zbiór wszędziegęsty. Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich jego przekrojów, dających luki. Wszystkie elementy zbioru Γ dołączmy da zbioru G, tworząc w ten sposób nowy zbiór

$$\mathfrak{G} = G + \Gamma.$$

Zbiór ten uporządkujemy w następujący sposób.

Dla tych elementów zbioru $\mathfrak{G}$, które są zarazem elementami zbioru G, pozostawimy w mocy ich wzajemne względności porządkowe, w jakich były do siebie w zbiorze G. Należy więc jeszcze określić względności porządkowe elementów części Γ względem elementów części G, oraz ich względności wzajemne.

Niech $\gamma = [A, B]$ oznacza dany element zbioru Γ, g — dany element zbioru G. Element g należy w przekroju $[A, B]$ do pewnej klasy: umówimy się uważać w zbiorze $\mathfrak{G}$ element g jako wcześniejszy od elementu γ, jeżeli w uważanym przekroju g należy do klasy A i jako późniejszy od γ, jeżeli g należy do klasy B.

Niech teraz γ i γ_1 będą dwa różne elementy zbioru Γ, $[A, B]$ i $[A_1, B_1]$ — odpowiednie przekroje. Klasy A i A_1 nie mogą być identyczne, gdyż wtedy byłyby oczywiście identyczne i klasy B i B_1, a więc też i elementy γ i γ_1, wbrew założeniu, że są one różne. W jednej z klas A i A_1 znajdzie się więc taki element zbioru G, którego nie będzie w drugiej: np. w klasie A taki element a, którego nie będzie w klasie A_1. Element ten będzie więc w przekroju γ_1 należał do klasy B_1: wszystkie elementy klasy A_1 będą więc wcześniejsze od a, skąd wniosek, że cała klasa A_1 jest właściwą częścią klasy A. Jeżeli więc dwa przekroje γ i γ_1 są różne, to jedna z klas A i A_1 jest wtedy właściwą częścią drugiej: umówimy się w zbiorze $\mathfrak{G}$ uważać element γ za wcześniejszy od γ_1, jeżeli klasa A jest właściwą częścią klasy A_1, oraz element γ_1 za wcześniejszy od γ, jeżeli klasa A_1 jest właściwą częścią klasy A.

Dowód, że powyższe umowy istotnie wyznaczają uporządkowanie zbioru $\mathfrak{G}$, nie przedstawia żadnej trudności.

Łatwo widzieć, że zbiór G jest wszędziegęstą częścią zbioru $\mathfrak{G}$. Jeżeli bowiem γ i γ_1 są dwa elementy zbioru $\mathfrak{G}$, należące do Γ, A i A_1 odpowiednie klasy, i $\gamma \prec \gamma_1$, to klasa A jest częścią właściwą klasy A_1 i przeto w tej ostatniej znajdziemy element a_1, późniejszy od każdego elementu klasy A: jasnem jest, że a_1 będzie właśnie elementem zbioru G, zawartym między γ i γ_1. Jeżeli teraz z dwóch danych elementów

zbioru $\mathfrak{G}$ jeden należy do G, a drugi do Γ, np. g do G i γ do Γ, i jeżeli położymy $\gamma = [A, B]$, to element g należy do jednej z klas A lub B: jeżeli należy do A, to wyznaczmy w tej klasie element g_1, późniejszy od g (jest to możliwe, gdyż klasa A nie posiada elementu ostatniego); jeżeli g należy do klasy B, to wyznaczmy w tej klasie element g_1, wcześniejszy od g (jest to możliwe, gdyż klasa B nie posiada elementu pierwszego); w każdym razie będzie g_1 elementem zawartym między g i γ. Jeżeli wreszcie oba dane elementy zbioru $\mathfrak{G}$ należą do G, to między niemi można wyznaczyć element, należący do G, gdyż zbiór G jest, jak zakładamy, wszędziegęsty. Można więc między każdemi dwoma rożnemi elementami zbioru $\mathfrak{G}$ wyznaczyć element zbioru G, co dowodzi, że ten ostatni jest wszędziegęstą częścią zbioru $\mathfrak{G}$.

Wynika stąd dalej, że sam zbiór $\mathfrak{G}$ jest wszędziegęsty, że więc nie posiada skoków. Udowodnimy obecnie, że zbiór $\mathfrak{G}$ nie posiada luk.

Niech więc $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ oznacza jakikolwiek przekrój zbioru $\mathfrak{G}$. Przekrój ten wyznacza zarazem pewien przekrój $[A, B]$ zbioru G (jeżeli zaliczymy do klasy A wszystkie elementy zbioru G, należące do zbioru $\mathfrak{A}$).

Opierając się na uwadze, że zbiór G jest wszędziegęstą częścią zbioru $\mathfrak{G}$, łatwo widzieć, że gdyby klasa A posiadała element ostatni, to element ten byłby zarazem ostatnim elementem klasy $\mathfrak{A}$, podobnież, gdyby klasa B posiadała element pierwszy, to byłby to zarazem pierwszy element klasy $\mathfrak{B}$. Jeżeli więc przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ daje lukę, to ani klasa A nie posiada elementu ostatniego, ani też klasa B nie posiada elementu pierwszego: przekrój $[A, B]$ jest więc wtedy pewnym elementem γ zbioru Γ, późniejszym od każdego elementu klasy A, oraz wcześniejszym od każdego elementu klasy B. Powiadam, że w klasie $\mathfrak{A}$ niema elementu późniejszego od γ. Gdyby bowiem w klasie $\mathfrak{A}$ istniał element późniejszy od γ, to między temi elementami możnaby wyznaczyć element a zbioru G, który, jako późniejszy od γ, musiałby należeć do klasy B, wbrew założeniu, że A jest zbiorem wszystkich elementów klasy $\mathfrak{A}$, należących do G. Podobnież dowiedlibyśmy, że w klasie $\mathfrak{B}$ niema elementu wcześniejszego od γ. Ale sam element γ musi należeć do jednej z klas $\mathfrak{A}$ lub $\mathfrak{B}$: jeżeli należy do $\mathfrak{A}$, to będzie oczywiście ostatnim elementem tej klasy, jeżeli zaś do $\mathfrak{B}$—to będzie pierwszym elementem tej klasy. Przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ nie może więc dawać luki.

Dowiedliśmy zatem, że, rozszerzając w powyższy sposób zbiór G, przez dołączenie do niego nowych elementów, zapełniliśmy jego luki i otrzymaliśmy zbiór ciągły.

Gdybyśmy, w szczególności, jako zbiór G przyjęli zbiór wszyst-

kich liczb wymiernych, to powyższa metoda zapełniania luk przedstawiałaby właśnie teoryę Dedekinda liczb niewymiernych[1]).

Możemy więc w sposób czysto arytmetyczny określić liczby niewymierne (jako symbole pewnych przekrojów zbioru liczb wymiernych) i dalej, w sposób całkiem ścisły rozwinąć całą Analizę, nie posługując się żadnemi mętnemi pojęciami, ani też nie wprowadzając żadnych elementów obcych Arytmetyce (Stąd mowa o arytmetyzacyi Matematyki współczesnej).

Wobec tego godnem jest zaznaczenia, że jeszcze w 1867-ym roku pisał Hankel: „Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal, und ohne den Begriff der Grösse zu behandeln, muss auf höchst abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich in vollkommener Strenge durchführen liessen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Werth nich haben“ [2]).

Jednocześnie prawie z Dedekindem zbudował teoryę liczb niewymiernych Cantor, opierając się na pojęciu ciągów podstawowych. Teoryę Cantora wyłożyłem przed kilku laty obszerniej w osobnej książce[3]) i dlatego jej tu bliżej omawiać nie będę.

Dodam wreszcie, że istnieje jeszcze trzecia teorya liczb niewymiernych, mianowicie teorya Weierstrassa, która powstała wprawdzie wcześniej od teoryi Cantora i Dedekinda, ale drukiem została ogłoszoną znacznie później, przez uczniów Weierstrassa. Teorya ta zresztą mało się różni od teoryi Cantora, którą można uważać za jej pomyślne rozwinięcie. Obszerniej przedstawił teoryę Weierstrassa przed kilku laty V. Dantscher[4]).

Zauważymy wreszcie, że wszystkie trzy wspomniane teorye są równoważne, w tem znaczeniu, że między liczbami każdej z tych teoryi daje się ustalić odpowiedniość doskonała, przy której wyniki działań nad odpowiedniemi liczbami są zawsze odpowiednie.

10. Niech P i Q będą dwa dane zbiory. Jeżeli każdemu elementowi p zbioru P został podporządkowany pewien element q zbioru Q (przyczem jeden i ten sam element zbioru Q może być podporządkowa-

---

[1]) R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872. (Wydanie czwarte: 1905).

[2]) H. Hankel: Theorie der complexen Zahlensysteme. Lipsk, 1867, str. 46 i 47.

[3]) Teorya liczb niewymiernych. Warszawa 1910. (Bibl. mat.-fiz. Serya III, T. VI).

[4]) Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen. Lipsk 1908.

ny kilku różnym elementom zbioru P, a z drugiej strony mogą też być w zbiorze Q elementy, które nie zostały podporządkowane żadnemu elementowi zbioru P), to mówimy, żeśmy określili funkcyę elementów zbioru P. Element q, podporządkowany elementowi p, oznaczamy przytem symbolem

$$f(p).$$

Jeżeli zbiory P i Q są uporządkowane i w sobie gęste, to można mówić o ciągłości funkcyi.

Powiadamy, że dana funkcya $f(p)$ jest dla danego elementu p_0 (nie będącego elementem pierwszym) ciągłą ze strony lewej, jeżeli do każdego elementu q_1, wcześniejszego od $q_0 = f(p_0)$ (o ile takie elementy w zbiorze Q istnieją), oraz do każdego elementu q_2, późniejszego od q_0 (znów z podobnem zastrzeżeniem), można dobrać taki element p', wcześniejszy od p_0, iżby warunki

$$p' \lessgtr p \lessgtr p_0$$

pociągały za sobą zawsze warunki:

$$q_1 \lessgtr f(p) \lessgtr q_2.$$

Podobnież powiadamy, że dana funkcya $f(p)$ jest dla danego elementu p_0 (nie będącego elementem ostatnim), ciągłą ze strony prawej jeżeli, pozostawiając powyższe znaczenie elementów q_1 i q_2, można do nich dobrać taki element p'', późniejszy od p_0, iżby warunki

$$p_0 \lessgtr p \lessgtr p''$$

pociągały za sobą zawsze:

$$q_1 \lessgtr f(p) \lessgtr q_2.$$

Funkcyę, ciągłą dla danego elementu p_0 jednocześnie ze strony lewej i prawej, nazywamy ciągłą obustronnie dla tego elementu, albo poprostu ciągłą dla p_0.

Widzimy zatem, jak ogólnem jest nawet pojęcie ciągłości funkcyi.

11. Niech teraz G_1 i G_2 będą dwa dane zbiory uporządkowane. Utwórzmy zbiór

$$G = G_1 + G_2$$

i uporządkujmy go w ten sposób, że dla każdych dwóch jego elementów, które należą jednocześnie do G_1 lub jednocześnie do G_2, pozostawmy tę względność porządkową, w jakiej były do siebie w tych zbiorach, zaś z dwóch danych elementów zbioru G, z których jeden należy do G_1

a drugi do G_2, uważajmy zawsze jako wcześniejszy ten, który należy do G_1.

Łatwo widzieć, że przez powyższą umowę zbiór G zostanie istotnie uporządkowany i że gdybyśmy zbiory G_1 i G_2 zastąpili odpowiednio przez zbiory podobne im G'_1 i G'_2, to otrzymalibyśmy zbiór G', podobny zbiorowi G.

Możemy więc mówić o sumie typów porządkowych.

Przykłady. Oznaczyliśmy w art. 4-ym symbolem ω typ porządkowy, którego przedstawicielem jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, uporządkowany według wielkości, przez $^*\omega$ zaś oznaczyliśmy typ odwrotny. Będzie więc

$$^*\omega + \omega$$

typem, do którego należy zbiór wszystkich liczb całkowitych, uporządkowanych według wielkości.

Suma

$$\omega + {}^*\omega$$

będzie przedstawiała całkiem inny typ porządkowy, do którego należy np. zbiór wszystkich odwrotności liczb całkowitych, różnych od zera, uporządkowany według wielkości.

Własności typów

$$^*\omega + \omega \quad \text{oraz} \quad \omega + {}^*\omega$$

są różne: pierwszy np. nie posiada ani pierwszego ani ostatniego elementu, gdy tymczasem typ drugi posiada je oba; pierwszy typ daje same skoki, natomiast drugi posiada też lukę.

Zbadany przykład jest nader pouczający: dowodzi on, że suma typów porządkowych jest zależna od porządku składników. Składniki sumy dwóch typów grają więc różną rolę; dlatego też dano im różne nazwy: pierwszy zwie się augendus, drugi — addendus.

Jako inny przykład możemy wziąć sumy

$$1 + \omega \quad \text{oraz} \quad \omega + 1.$$

Mamy, jak łatwo widzieć,

$$1 + \omega = \omega,$$

gdy tymczasem $\omega + 1$ daje typ nowy.

Łatwo widzieć, że suma dwóch typów tylko wtedy nie zależy od porządku składników, kiedy oba składniki są jednakowe.

Pojęcie sumy natychmiast uogólniamy na jakąkolwiek skończoną liczbę typów. Łatwo widzieć, że prawo łączności będzie taka suma posiadała. Np.

$$(\omega + 1) + \omega = \omega + (1 + \omega) = \omega + \omega.$$

Uogólnimy teraz pojęcie sumy typów na szeregi nieskończone. Niech

$$G_1, G_2, G_3, \ldots$$

oznacza dany ciąg nieskończony zbiorów uporządkowanych.

Utwórzmy zbiór

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$$

i uporządkujmy go w ten sposób: jeżeli dwa dane elementy zbioru G należą do jednego i tego samego zbioru z ciągu G_n, to pozostawmy ich względność porządkową, jaką miały w tym zbiorze; jeżeli zaś dane elementy należą do różnych zbiorów ciągu G_n, to ten uważajmy za wcześniejszy, dla którego wskaźnik zbioru G_n, do którego należy, jest mniejszy.

Będziemy więc mogli powiedzieć, że każdy dany szereg nieskończony typów porządkowych posiada oznaczoną w zupełności sumę.

Np. sumą szeregu nieskończonego

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

będzie typ ω; sumą zaś szeregu nieskończonego

$$\omega + \omega + \omega + \ldots$$

będzie, jak łatwo widzieć, typ, odpowiadający zbiorowi 2) z art. 3-go.

Ciekawą własność (jak to czytelnik sam sprawdzi) posiada typ:

$$\eta = {}^*\omega + \omega + {}^*\omega + \omega + {}^*\omega + \omega + \ldots$$

Każdy element tego typu posiada swój poprzedni (t. j. ostatni element zbioru wszystkich wcześniejszych od danego) oraz swój następny (t. j. pierwszy element ze zbioru wszystkich późniejszych od danego).

Widzimy zatem, że własność, iż każdy element zbioru posiada element poprzedni i element następny, nie jest wyłączną własnością typu zbioru wszystkich liczb całkowitych.

Ciekawą własność posiada też typ

$${}^*\eta + \eta;$$

jak łatwo widzieć, wszystkie przekroje jego są podobne. (To znaczy dla każdych dwóch przekrojów $[A, B]$ i $[A_1, B_1]$ klasa A jest podobna klasie A_1, zaś klasa B—klasie B_1).

Podobną własność posiada też typ

$$*\omega + \omega;$$

łatwo jednak widzieć, że typ

$$*\omega + \omega + *\omega + \omega$$

własności tej już nie posiada; typ η również jej nie posiada.

12. Wprowadzimy teraz pojęcie iloczynu typów.

Mając dwa dane zbiory uporządkowane G_1 i G_2, utwórzmy zbiór G wszystkich układów

$$(g_1, g_2),$$

gdzie g_1 jest jakimkolwiek elementem zbioru G_1, zaś g_2 — jakimkolwiek elementem zbioru G_2. Zbiór G uporządkujmy w ten sposób: przyjmiemy

$$(g_1, g_2) \lessdot (h_1, h_2),$$

jeżeli

$$g_2 \lessdot h_2,$$

albo też jeżeli jednocześnie

$$g_2 = h_2 \quad \text{oraz} \quad g_1 \lessdot h_1.$$

Jeżeli t_1, t_2 i t są odpowiednio typami porządkowemi zbiorów G_1, G_2 i G, to będziemy pisali:

$$t = t_1 \cdot t_2$$

i nazywali typ t *iloczynem* typu t_1 przez typ t_2.

Iloczyn typów wogóle zależy od porządku czynników, jak to łatwo sprawdzić na przykładzie:

$$2 \cdot \omega = \omega,$$

zaś

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega.$$

Pierwszy czynnik iloczynu nosi nazwę *multiplicandus*, drugi—*multiplicator*.

Czytelnik udowodni z łatwością, że

$$\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \omega + \ldots$$

Pojęcie iloczynu typów porządkowych uogólniamy z łatwością na większą liczbę czynników. Łatwo sprawdzić, że dla każdych trzech typów porządkowych mamy:

$$(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3),$$

oraz:

$$t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3,$$

natomiast wzór

$$(t_1 + t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3$$

może nie być prawdziwym: np.

$$(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega,$$

zaś

$$1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega.$$

Rozpatrzymy tutaj bliżej jeszcze jeden przykład iloczynu typów porządkowych. Oznaczmy przez ξ typ porządkowy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1), z włączeniem granic, uporządkowanego według wielkości. Weźmiemy pod rozwagę iloczyn

$$\xi \cdot \xi = \eta.$$

Przykładem zbioru uporządkowanego typu η będzie, jak łatwo widzieć, zbiór Z wszystkich liczb zespolonych

$$a + bi,$$

gdzie $0 \leqslant a \leqslant 1$ oraz $0 \leqslant b \leqslant 1$, uporządkowany w ten sposób, iż

$$a + bi \lessgtr c + di$$

jeżeli

$$a \lessgtr c,$$

albo też jeżeli jednocześnie

$$a = c, \text{ oraz } b \lessgtr d.$$

Czytelnik udowodni z łatwością, że η jest typem ciągłym. Okażemy teraz, że typ η jest różnym od typu ξ.

Weźmy w tym celu pod uwagę zbiór U wszystkich przedziałów.

$$(a, a + i),$$

gdzie $0 \leqslant a \leqslant 1$. Zbiór U jest oczywiście nieprzeliczalny.

Niech teraz G oznacza jakąkolwiek wszędziegęstą część zbioru Z. Wewnątrz każdego przedziału

$$(a, a + i)$$

istnieje zatem przynajmniej jeden element zbioru G, a że zbiór U jest nieprzeliczalny, więc i zbiór G musi być nieprzeliczalny.

Zbiór Z nie posiada zatem części wszędziegęstej, przeliczalnej

i przeto (w myśl art. 8-go) nie może przedstawiać continuum liniowego, jakiem jest typ ξ.

Istnieją zatem zbiory ciągłe, nie będące continuami liniowemi.

13. Wiadomo, jak ważną rolę odgrywa w Matematyce tak zwana zasada indukcyi. Zasadę tę można sformułować w sposób następujący:

„Jeżeli jakieś twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1 i jeżeli wiemy, że gdyby było prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych, mniejszych od n, to musiałoby być prawdziwe i dla liczby n — to w takim razie twierdzenie nasze jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej".

Zachodzi teraz pytanie, czy prawdziwą będzie następująca ogólniejsza zasada, którą nazwiemy zasadą indukcyi pozaskończonej: „Jeżeli jakieś twierdzenie jest prawdziwe dla pierwszego elementu pewnego zbioru uporządkowanego i jeżeli wiemy, że gdyby było prawdziwe dla wszystkich elementów, wcześniejszych od jakiegokolwiek elementu a, to musiałoby być prawdziwe i dla elementu a — to w takim razie twierdzenie nasze jest prawdziwe dla każdego elementu uważanego zbioru".

Załóżmy, że dla pewnego zbioru Z zasada powyższa nie jest prawdziwą. Zakładamy więc, że:

1) pewne twierdzenie jest prawdziwe dla pierwszego elementu zbioru Z;

2) gdyby nasze twierdzenie było prawdziwe dla wszystkich elementów zbioru Z, wcześniejszych od jakiegokolwiek elementu a, to musiałoby być prawdziwe i dla elementu a;

3) nasze twierdzenie jest prawdziwe nie dla wszystkich elementów zbioru Z.

Oznaczmy przez N zbiór tych wszystkich elementów zbioru Z, dla których twierdzenie nasze nie jest prawdziwe: zbiór N istnieje, w myśl założenia 3). Powiadam, że zbiór N nie posiada elementu pierwszego.

Przypuśćmy dla dowodu, że a jest pierwszym elementem zbioru N. W myśl definicyi tego zbioru, element a byłby więc pierwszym elementem zbioru Z, dla którego nasze twierdzenie nie jest prawdziwe: to ostatnie musiałoby zatem być prawdziwe dla każdego elementu zbioru Z, wcześniejszego od a. Ale w takim razie musiałoby, w myśl założenia 2), być prawdziwe i dla elementu a, co przeczy przypuszczeniu, że a należy do zbioru N.

Jeżeli więc dla danego zbioru Z zasada indukcyi pozaskończonej nie jest prawdziwa, to zbiór ten musi posiadać część, nie mającą pierwszego elementu. Stąd dalej natychmiastowy wniosek, że dla zbioru, któ-

rego każda część posiada element pierwszy, zasada indukcyi pozaskończonej jest zawsze prawdziwa.

Zbiór uporządkowany, którego każda część posiada element pierwszy, nazywamy zbiorem dobrze uporządkowanym (wohlgeordnete Menge, ensemble bien ordonné). Możemy więc powiedzieć:

Dla wszystkich zbiorów dobrze uporządkowanych prawdziwą jest zasada indukcyi pozaskończonej.

Udowodnimy obecnie, że tylko dla zbiorów dobrze uporządkowanych stosowalną jest zasada indukcyi pozaskończonej.

Zauważymy przedewszystkiem, że z samego sformułowania zasady indukcyi wynika, że jest ona stosowalna tylko dla takich zbiorów, które posiadają element pierwszy.

Załóżmy więc, że dla danego zbioru uporządkowanego G, posiadającego element pierwszy, prawdziwą jest zasada indukcyi pozaskończonej. Zastosujemy ją więc do następującego twierdzenia, które nazywać będziemy dla krótkości twierdzeniem T.

„Zbiór wszystkich elementów, nie późniejszych od pewnego elementu g, jest dobrze uporządkowany".

Dla pierwszego elementu zbioru G twierdzenie T jest, jak łatwo widzieć, prawdziwe. Załóżmy dalej, że twierdzenie T jest prawdziwe dla wszystkich elementów g, wcześniejszych od pewnego elementu a zbioru G. Gdyby twierdzenie T pomimo to nie było prawdziwe dla elementu a, to znaczyłoby to, że zbiór F wszystkich elementów zbioru G, nie późniejszych od a, nie jest dobrze uporządkowany, innemi słowy, że zbiór F posiada część H, nie mającą pierwszego elementu. A więc, jeżeli obierzemy w zbiorze H jakikolwiek element, to można w tym zbiorze zawsze wyznaczyć element, wcześniejszy od obranego. Możemy więc oczywiście wyznaczyć w zbiorze H element h, wcześniejszy od a (gdyby element a nie należał do H, to wystarczyłoby w tym celu obrać jako h jakikolwiek element zbioru H). Oznaczmy przez H_1 zbiór wszystkich elementów zbioru H, nie późniejszych od h. Zbiór H_1 oczywiście nie może posiadać elementu pierwszego (gdyż pierwszy jego element byłby zarazem pierwszym elementem zbioru H).

Wynika stąd, że zbiór wszystkich elementów zbioru G, które nie są późniejsze od h, nie jest dobrze uporządkowany (gdyż zbiór ten będzie posiadał część H_1, nie mającą pierwszego elementu). Przeczy to jednak założeniu, że twierdzenie T jest prawdziwe dla wszystkich elementów zbioru G, wcześniejszych od a.

A więc: jeżeli twierdzenie T jest prawdziwe dla wszystkich elemen-

tów zbioru G, wcześniejszych od a, to musi być prawdziwe i dla elementu a.

Jeżeli zatem zasada indukcyi pozaskończonej jest prawdziwa dla zbioru G, to twierdzenie T musi być prawdziwe dla każdego jego elementu. Łatwo jednak widzieć, że w takim razie zbiór G nie może posiadać żadnej części, nie mającej pierwszego elementu, bo, oznaczając przez h jakikolwiek element tej części, doszlibyśmy, jak wyżej, do wniosku, że twierdzenie T nie byłoby prawdziwe dla elementu h zbioru G.

Dowiedliśmy więc, że zbiór, dla którego zasada indukcyi pozaskończonej jest prawdziwa, musi być zbiorem dobrze uporządkowanym.

Zestawiając ten wynik z tym, któryśmy otrzymali wyżej, możemy teraz powiedzieć:

Na to aby dla danego zbioru uporządkowanego była stosowalną zasada indukcyi pozaskończonej, potrzeba i wystarcza, iżby zbiór ten był dobrze uporządkowany.

Już ta okoliczność wskazuje na to, jak ważną rolę odgrywają zbiory dobrze uporządkowane. Bliższem zbadaniem własności tych zbiorów zajmiemy się w jednym z dalszych rozdziałów.

ROZDZIAŁ IV.

Zbiory mocy continuum.

1. Nazwaliśmy w art. 8-mym Rozd. III-go *continuum liniowem* każdy zbiór uporządkowany zamknięty, posiadający część przeliczalną, wszędziegęstą. W tymże art. dowiedliśmy, że wszystkie continua liniowe są podobne.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0,1), z włączeniem granic, spełnia, jak łatwo widzieć, definicyę continuum liniowego (jeżeli go uporządkujemy według wielkości). W samej rzeczy, przyjmując np. teoryę liczb niewymiernych *Dedekinda* (art. 9-ty Rozd. III-go), będziemy mogli powiedzieć, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0,1), z włączeniem granic, jest ciągły i posiada element pierwszy oraz element ostatni; zbiór ten będzie zatem, w myśl tw. z art. 7-go Rozdz. III-go, zamknięty. Z drugiej strony z teoryi *Dedekinda* wynika, że zbiór wszystkich liczb wymiernych, który jest, jak wiemy, przeliczalny, będzie wszędziegęstą częścią naszego zbioru. Ten ostatni przedstawia więc continuum liniowe.

Możemy więc jeszcze powiedzieć:

Continua liniowe są to zbiory, podobne zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0,1) z włączeniem granic, uporządkowanemu według wielkości.

Wszystkie te zbiory posiadają oczywiście tę samą moc, którą nazwiemy mocą *continuum*, a odpowiednią liczbę kardynalną oznaczać będziemy literą gotycką

$$\mathfrak{c}.$$

W rozdziale niniejszym zajmiemy się właśnie badaniem zbiorów, mających moc continuum. Przy badaniach tych nie będziemy się zresztą posługiwali wynikami, otrzymanemi w Rozdz. III-cim; będziemy się tu opierali tylko na tem, że zbiory mocy continuum są to zbiory tej samej mocy, co zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1).

Włączenie lub wyłączenie (jednej lub obu) granic naturalnie mocy nie zmieni, bo continua są zbiorami nieskończonemi.

2. Łatwo ustalić odpowiedniość doskonałą między zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych wewnątrz przedziału (0, 1), a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych wewnątrz jakiegokolwiek przedziału (a, b). Wystarczy w tym celu każdej liczbie x, leżącej wewnątrz przedziału (0, 1), podporządkować liczbę

$$y = (b - a)\,x + a,$$

leżącą wewnątrz przedziału (a, b). Czytelnik z łatwością udowodni, że podporządkowanie to jest jedno-jednoznaczne.

Weźmy teraz pod rozwagę zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych wewnątrz przedziału (0, 2). Zbiór ten możemy uważać jako sumę dwóch zbiorów: zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1) z wyłączeniem dolnej, a włączeniem górnej jego granicy, oraz zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, leżących wewnątrz przedziału (1, 2). Oba zbiory mają oczywiście moc $\mathfrak{c}$: tę samą moc ma jednak i ich suma, jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, leżących wewnątrz przedziału (0, 2). Mamy więc wzór:

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\,,$$

który możemy natychmiast uogólnić na jakąkolwiek skończoną liczbę składników. Zajmiemy się obecnie uogólnieniem tego wzoru na nieskończony szereg składników $\mathfrak{c}$.

Wyznaczymy w tym celu moc zbioru wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich. Łatwo ustalić odpowiedniość doskonałą między tym zbiorem a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych wewnątrz przedziału (0, 1).

Wystarczy każdej liczbie rzeczywistej dodatniej x podporządkować liczbę

$$y = \frac{x}{1 + x}\,,$$

leżącą wewnątrz przedziału (0, 1). Dowód, że podporządkowanie to będzie jedno-jednoznacznem, pozostawiamy czytelnikowi.

Jest więc zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich mocy $\mathfrak{c}$. Ale z drugiej strony zbiór ten można uważać jako sumę nieskończonego szeregu zbiorów Z_n, gdzie Z_n oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, spełniających nierówności

$$n - 1 < x \leqslant n.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów Z_n jest mocy $\mathfrak{c}$, więc mamy wzór:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \ldots$$

Otrzymane w tym artykule wyniki możemy streścić w twierdzeniu:

Suma skończonej albo przeliczalnej mnogości zbiorów o mocy continuum jest znowu zbiorem o mocy continuum.

3. Niech M i N będą dwa dane zbiory. Utwórzmy zbiór P wszystkich możliwych układów

$$(m, n),$$

gdzie m oznacza jakikolwiek element zbioru M, zaś n—jakikolwiek element zbioru N. Zbiór P nazywamy *iloczynem* zbiorów M i N, pisząc

$$P = M \,.\, N.$$

Jasnem jest, że dla

$$M_1 \backsim M \quad \text{oraz} \quad N_1 \backsim N$$

będzie

$$P_1 = M_1 N_1 \backsim P.$$

Łatwo też widzieć, że gdyby zbiory M i N były skończone, to liczba elementów zbioru P byłaby iloczynem liczb elementów zbiorów M i N.

Oznaczmy przez $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ odpowiednio liczby kardynalne zbiorów M, N i P. Nazywać będziemy liczbę kardynalną $\mathfrak{p}$ *iloczynem* liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$, pisząc:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{n}.$$

Jasnem jest, że każde dwie dane liczby kardynalne dają oznaczony w zupełności iloczyn, który nie zależy od porządku czynników.

Pojęcie iloczynu liczb kardynalnych uogólniamy natychmiast na dowolną (skończoną) liczbę czynników. Łatwo dowieść, że iloczyn liczb kardynalnych posiada prawa: przemiennościowe, łącznościowe i rozdzielnościowe; szczegółowy dowód tych praw pozostawiamy czytelnikowi.

Jako przykład iloczynu liczb kardynalnych weźmy iloczyn

$$n \,.\, \mathfrak{n},$$

gdzie n jest liczbą kardynalną skończoną, zaś $\mathfrak{n}$—liczbą kardynalną pozaskończoną. Opierając się na definicyi iloczynu liczb kardynalnych, okazalibyśmy z największą łatwością, że iloczyn $n \,.\, \mathfrak{n}$ równy jest sumie n składników, z których każdy jest liczbą kardynalną $\mathfrak{n}$.

Podobnież dowiedlibyśmy, że

$$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n} + \mathfrak{n} + \ldots$$

Jest więc np.:

$$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \ldots,$$

czyli

$$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Obliczymy obecnie iloczyn $\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c}$. Wystarczy tu wyznaczyć moc zbioru Z wszystkich układów (x, y), gdzie x i y są liczbami rzeczywistemi dodatniemi, nie większemi od jedności.

Niech (x, y) oznacza dany układ zbioru Z. Rozwińmy liczby x i y na ułamki dziesiętne istotnie nieskończone.

Wyobraźmy sobie rozwinięcie liczby x na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony. Połączmy po przecinku w jeden symbol—który nazwiemy symbolem Königa—każdą cyfrę rożną od zera wraz ze wszystkiemi bezpośrednio poprzedzającemi ją zerami. Symbole takie, biorąc je w nawiasy [ ], wypiszmy po kolei w tym porządku, w jakim je otrzymamy. Więc np. dla liczby

$$x = 0{,}7105000400301820 06\ldots$$

symbolami takimi będą:

$$a_1 = [7],\ \ a_2 = [1],\ \ a_3 = [05],\ \ a_4 = [0004],\ \ a_5 = [003],\ \ a_6 = [01],$$
$$a_7 = [8],\ \ a_8 = [2],\ \ a_9 = [006], \ldots$$

W każdym więc razie otrzymamy dla naszej liczby x pewien oznaczony w zupełności ciąg takich symboli:

$$x = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots \},$$

przyczem ciąg ten będzie nieskończony, skoro, jak zakładamy, rozwijaliśmy x na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony (a więc zawierający nieskończenie wiele cyfr różnych od zera).

Każdej więc liczbie rzeczywistej x, gdzie $0 < x \leqslant 1$, odpowiada oznaczony w zupełności ciąg nieskończony

$$\{ a_1, a_2, a_3, \ldots \}$$

symboli König a; ale też, jak łatwo widzieć, i naodwrót, każdy taki ciąg nieskończony odpowiada pewnej, w zupełności oznaczonej liczbie rzeczywistej dodatniej, nie większej od jedności. (Otrzymamy ją, wpisując zero jako całość, zaś po przecinku wypisując wszystkie kolejne symbole danego ciągu, odrzuciwszy nawiasy, ale zachowując odpowiednie zera).

Przedstawiwszy w powyższy sposób liczby

$$x = \{ a_1, a_2, a_3, \dots \}$$

oraz

$$y = \{ b_1, b_2, b_3, \dots \},$$

wyznaczymy liczbę

$$z = \{ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, \dots \},$$

dla której, określający ją ciąg symboli Königa otrzymamy, wstawiając wyrazy ciągu dla y między wyrazy ciągu dla x.

Każdemu układowi (x, y) zbioru Z odpowiada zatem oznaczona w zupełności liczba z, spełniająca nierówności:

$$0 < z \leqslant 1.$$

Ale, jak łatwo widzieć i naodwrót: każda taka liczba

$$z = \{ c_1, c_2, c_3, \dots \}$$

odpowiada oznaczonemu układowi (x, y) zbioru Z; aby go otrzymać, wystarczy położyć

$$x = \{ c_1, c_3, c_5, \dots \}$$

$$y = \{ c_2, c_4, c_6, \dots \}.$$

Ustaliliśmy więc odpowiedniość doskonałą między wszystkiemi układami (x, y) zbioru Z oraz wszystkiemi liczbami rzeczywistemi z, dla których $0 < z \leqslant 1$. Wynika stąd, że zbiór Z jest mocy continuum, czyli że

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Twierdzenie to doprowadza do ciekawego paradoksu, jeżeli mu nadać interpretacyę geometryczną, odwzorowując układy (x, y) zapomocą punktów płaszczyzny.

Aby jednak módz mówić o punktach i o płaszczyźnie, musimy przedewszystkiem mieć ścisłą definicyę tych pojęć; na intuicyjnych wyobrażeniach geometrycznych polegać nie możemy: mieliśmy już wielokrotnie sposobność przekonania się, jak zawodzi intuicya w badaniach Teoryi mnogości.

Podstawy Geometryi istotnie mogą być ściśle ugruntowane, i to właśnie na tle Teoryi mnogości. Wyszlibyśmy jednak daleko po za ramy niniejszych wykładów, gdybyśmy się chcieli sprawą tą szczegółowo zajmować. Możemy tu conajwyżej rzucić kilka myśli przewodnich, których rozwinięcie czytelnik znajdzie w głośnem dziele Hilberta o podstawach Geometryi [1]).

Pomyślmy sobie trzy różne zbiory, które ograniczymy następnie rozmaitemi warunkami. Elementy pierwszego zbioru nazwijmy punktami, drugiego—prostemi, trzeciego—płaszczyznami. Każdemu układowi (A, B) dwóch elementów pierwszego zbioru podporządkujmy pewien element p drugiego zbioru. Podporządkowanie to ma być jednoznaczne, ale nie jedno-jednoznaczne; natomiast ma ono podlegać następującemu warunkowi: jeżeli układom (A, B) i (C, D) zbioru punktów jest podporządkowany jeden i ten sam element p zbioru prostych, to układowi (B, C) ma być podporządkowany również element p. Będziemy się przytem wyrażali, że punkty A i B wyznaczają prostą p, albo leżą na prostej p, albo że prosta p przechodzi przez punkty A i B.

Podobnych warunków, które dotyczą bądź to samych zbiorów, bądź też różnych skojarzeń ich elementów, nakładamy cały szereg: dla przykładu przytoczyliśmy tylko najprostsze. Rzecz prosta, że podobne warunki moglibyśmy stawiać całkiem dowolnie—byleby naturalnie nie były między sobą sprzeczne.

Warunki te nazywamy aksyomatami albo pewnikami. Są to raczej części składowe definicyi uważanych zbiorów; przyjąć dany pewnik, to znaczy powiedzieć: chcemy rozważać tylko takie zbiory, które spełniają ten a ten warunek, albo których elementy dadzą się ze sobą tak a tak skojarzyć.

Okazuje się, że w ten sposób można wybrać taki układ pewników (łącznie z umowami co do sposobu wyrażania się), któryby się zgadzał w zupełności z naszemi (intuicyjnemi) wyobrażeniami geometrycznemi, tak przytem, że nie można już dodać żadnego nowego pewnika (nie wynikającego z przyjętych), ani też odrzucić żadnego z przyjętych, nie wpadając przez to w sprzeczność z temi wyobrażeniami.

Otóż z pewników Hilberta wynika jako twierdzenie możność ustalenia odpowiedniości doskonałej między zbiorem wszystkich punktów, leżących na danej prostej, a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Podobnież, jako inne twierdzenie, wynika możność ustalenia

[1]) D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Lipsk 1903.

odpowiedniości doskonałej między wszystkiemi punktami płaszczyzny a wszystkiemi układami dwóch liczb rzeczywistych. Wszystkie te twierdzenia, które można i trzeba udowodnić, przyjmuje się zazwyczaj (w Geometryi analitycznej) za oczywiste. Że oczywistemi one bynajmniej nie są, podniósł po raz pierwszy Cantor (w roku 1872). W tymże roku Dedekind zwrócił uwagę na ścisły związek tej sprawy z wyobrażeniem naszem o ciągłości linii prostej.

Że kwestye te nie mogły się wyłonić wcześniej, niż w drugiej połowie XIX-go stulecia, jest zrozumiałe: nie było przecież wcześniej ścisłej definicyi liczb niewymiernych.

Przyjmując twierdzenie o istnieniu wspomnianych odpowiedniości doskonałych, dochodzimy, wobec wzoru

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

do wniosku, że wszystkie punkty kwadratu można w sposób jedno-jednoznaczny odwzorować na skończonym odcinku. Twierdzenie to (znalezione przez Cantora w roku 1878) przedstawia ciekawy paradoks, gdyż skłonni byliśmy uważać płaszczyznę za nieskończenie obfitszą w punkty, niż prostą. Przyczyna tego paradoksu, jak twierdzi Klein[1]), leży w tem, że narazie trudno uwolnić się od przedstawiania sobie ciągłości we wzajemnem podporządkowaniu punktów płaszczyzny i prostej. W samej rzeczy atoli uważane podporządkowanie jest tak nieciągłe, jak tylko być może: niszczy ono wszystko, co charakteryzuje figury płaskie, względnie liniowe, jako takie: wszystko, z wyjątkiem ich mocy, tak naprzykład, jak gdybyśmy wszystkie punkty kwadratu wsypali do worka i tam je dobrze wymieszali.

Słusznie też twierdzi Couturat: „Par conséquent, ce qui constitue proprement et essentiellement les continus à plusieurs dimensions (comme le continu linéaire), ce n'est pas un ensemble de points, mais un ensemble de relations. Ce fait a une portée philosophique manifeste; il signifie, en somme, que l'espace n'est pas une simple «multiplicité», mais bien une multiplicité ordonnée; et il justifie la conception de Leibniz, qui voyait dans l'espace avant tout, un ordre" [2]).

4. Z równości $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, opierając się na zasadniczych własnościach iloczynu liczb kardynalnych, łatwo dalej wywnioskować, że

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$

---

[1]) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. T. I. Lipsk, 1908, p. 560.

[2]) Les principes des Mathématiques. Paris 1905, p. 134.

a nawet ogólniej, że dla jakiejkolwiek skończonej liczby czynników:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \dots \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$

a stąd, że zbiór wszystkich układów n liczb rzeczywistych

$$(x_1, x_2, \dots x_n)$$

(albo, jak mówimy: zbiór wszystkich punktów przestrzeni n—wymiarowej) jest (przy każdem danem naturalnem n) mocy continuum.

Stąd też wynika natychmiast, że zbiory, oznaczone w art. 3-cim Rozdz. I-go literami G i H, są również mocy continuum, gdyż, jak wiadomo, położenie prostej w przestrzeni określa się zapomocą czterech (niezależnych) parametrów rzeczywistych, zaś położenie danej bryły w przestrzeni—zapomocą sześciu takich parametrów.

Łatwo też byłoby dowieść, że mnogość wszystkich ciągów skończonych o wyrazach rzeczywistych jest mocy continuum.

W samej rzeczy, zbiór wszystkich takich ciągów możemy podzielić na przeliczalną mnogość klas, zaliczając do n-tej klasy wszystkie ciągi, składające się z n wyrazów. Zbiór wszystkich ciągów n-tej klasy, jako zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej będzie, jak dowiedliśmy, mocy continuum: takim też będzie zbiór wszystkich naszych ciągów, jako suma przeliczalnej mnogości zbiorów o mocy $\mathfrak{c}$ (art. 2).

Twierdzenie to, jak się o tem przekonamy w następnym artykule, pozostaje prawdziwem i dla ciągów nieskończonych.

5. Wobec przyjętej w art. 3-cim definicyi iloczynu skończonej liczby zbiorów, naturalnem będzie, jeżeli się umówimy nazywać iloczynem nieskończonego ciągu zbiorów

$$M_1, M_2, M_3, \dots,$$

zbiór M wszystkich możliwych ciągów nieskończonych

$$(m_1, m_2, m_3, \dots),$$

gdzie ogólnie m_n oznacza jakikolwiek element mnogości M_n.

Jeżeli $\mathfrak{m}_n$ i $\mathfrak{m}$ są liczby kardynalne, odpowiadające zbiorom M_n i M, to będziemy pisali

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \dots = \mathfrak{m}, \text{ albo } \mathfrak{m} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n$$

i nazywali liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$ iloczynem nieskończonym liczb $\mathfrak{m}_n$. Jasnem jest, że iloczyn taki zawsze istnieje, jako określona w zupełności liczba kardynalna, zależna jedynie od liczb kardynalnych, bę-

dących czynnikami, oraz że iloczyn taki posiada własności przemienności i łączności czynników.

Zbadamy teraz kilka przykładów.

Obliczmy przedewszystkiem iloczyn nieskończony, którego wszystkie czynniki są równe liczbie 2. W tym celu wystarczy obliczyć moc zbioru wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach równych zeru lub jedności. Wobec wyniku, otrzymanego w art. 2-gim Rozdz. III-go, dochodzimy do wniosku, że zbiór ten jest mocy continuum. A więc:

$$2 \,.\, 2 \,.\, 2 \ldots = \mathfrak{c}.$$

Łatwo dowieść, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych jest też mocy continuum. W samej rzeczy, każdemu ciągowi nieskończonemu o wyrazach naturalnych

$$(n_1, n_2, n_3, \ldots)$$

odpowiada oznaczona w zupełności liczba niewymierna przedziału (0,1), dająca rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}$$

i naodwrót. Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych jest więc równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb niewymiernych przedziału (0, 1). Ten ostatni otrzymamy, usuwając ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1), (który jest mocy $\mathfrak{c}$) wszystkie liczby wymierne tego przedziału, tworzące jak wiadomo, zbiór przeliczalny. A że $\mathfrak{c} - \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, więc mamy wniosek, o dowód którego chodziło.

Mamy zatem:

$$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} \ldots = \mathfrak{c}.$$

Załóżmy teraz, że wszystkie zbiory M_n są to zbiory liczb rzeczywistych x_n, spełniających nierówności:

$$0 < x_n \leqslant 1.$$

Będzie oczywiście każdy ze zbiorów M_n mocy continuum, a więc zbiór

$$M = M_1 \, M_2 \, M_3 \ldots$$

—zbiorem mocy $\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} \ldots$

Zbiór M jest to, w myśl definicyi iloczynu nieskończonego zbiorów, zbiór wszystkich ciągów nieskończonych

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

o wyrazach dodatnich, nie większych od jedności. Ustalimy odpowiedniość doskonałą między zbiorem M a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich $\leqslant 1$.

Niech

$$p = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

oznacza dany element zbioru M. Używając symboli Königa (art. 3), przedstawmy każdą z liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots$ w postaci

$$\begin{aligned} x_1 &= \{a_1', \; a_2', \; a_3', \ldots\}, \\ x_2 &= \{a_1'', \; a_2'', \; a_3'', \ldots\}, \\ x_3 &= \{a_1''', a_2''', a_3''', \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wyrazy ciągu podwójnego $a_m^{(n)}$ symboli Königa ustawmy np. zapomocą metody przekątnych (art. 11 Rozdz. II) w ciąg zwykły. Otrzymamy w ten sposób oznaczoną w zupełności liczbę rzeczywistą

$$x = \{a_1', a_1'', a_2', a_1''', a_2'', a_3', \ldots\},$$

przyczem będzie $0 < x \leqslant 1$.

Ale i naodwrót: mając taką liczbę

$$x = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\},$$

łatwo wyznaczyć ciąg nieskończony

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

któremu ta liczba odpowiada: wystarczy położyć:

$$\begin{aligned} x_1 &= \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{15}, \ldots\}, \\ x_2 &= \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{14}, \alpha_{20}, \ldots\}, \\ x_3 &= \{\alpha_4, \alpha_8, \alpha_{13}, \alpha_{19}, \alpha_{26}, \ldots\}, \\ &\text{i t. d.,} \end{aligned}$$

jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać.

Zbiór M jest więc mocy continuum, skąd wzór:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \ldots = \mathfrak{c}.$$

Gdybyśmy teraz założyli, że każdy z czynników M_n jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, to czynniki te zawsze byłyby mocy $\mathfrak{c}$. Mocą iloczynu M byłaby więc znowu liczba kardynalna $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \ldots = \mathfrak{c}$. Lecz zbiór M byłby teraz zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych: zbiór ten jest więc mocy continuum.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich układów dwóch liczb rzeczywistych, a więc mocy $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Gdybyśmy więc powtórzyli powyższe rozumowanie, zakładając, że każde M_n oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych, to doszlibyśmy do wniosku, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach zespolonych jest mocy continuum.

Wniosek. Zbiór wszystkich szeregów potęgowych (o spółczynnikach zespolonych):

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

jest mocy continuum.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że istnieje odpowiedniość doskonała między zbiorem wszystkich szeregów potęgowych o spółczynnikach zespolonych a zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

o wyrazach zespolonych. Dla ustalenia jej wystarczy każdemu szeregowi potęgowemu podporządkować ciąg kolejnych jego spółczynników.

6. Otrzymane wyżej wzory dla iloczynów nieskończonych można będzie przedstawić w bardziej zwięzłej formie, jeżeli wprowadzimy pojęcie potęgi liczb kardynalnych.

Niech M i N będą dwa dane zbiory. Każdemu elementowi zbioru N podporządkujmy pewien element zbioru M (Podporządkowanie to ma być jednoznaczne, ale niekoniecznie jedno-jednoznaczne: jeden i ten sam element zbioru M może być podporządkowany kilku różnym elementom zbioru N, a z drugiej strony w zbiorze M mogą się znajdować elementy, które nie zostały podporządkowane żadnemu elementowi zbioru N). Podporządkowanie to wyznacza, jak mówimy, funkcyę elementów zbioru N (porównaj art. 10 Rozdz. III-go).

Zbiór wszystkich możliwych podporządkowań elementów zbioru M elementom zbioru N oznaczamy symbolem

$$(M \mid N).$$

Załóżmy w szczególności, że uważane zbiory są skończone: niech $\mathfrak{m}$ oznacza liczbę elementów zbioru M, $\mathfrak{n}$—liczbę elementów zbioru N. Łatwo obliczyć, że zbiór $(M \mid N)$ będzie się składał z

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$$

elementów.

Otóż umówimy się i w tym przypadku, kiedy liczby kardynalne $\mathfrak{m}$

i $\mathfrak{n}$ są pozaskończone, oznaczać symbolem

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$$

moc zbioru ($M \mid N$).

Łatwo sprawdzić, że potęga liczb kardynalnych spełnia następujące wzory:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}},$$
$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p})^{\mathfrak{n}},$$
$$(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}}.$$

Niech, dalej, M oznacza daną mnogość, $\mathfrak{m}$—jej liczbę kardynalną i weźmy pod rozwagę liczbę kardynalną $\mathfrak{p}$, określoną wzorem:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \dots$$

Liczba kardynalna $\mathfrak{p}$ będzie, jak wiemy, odpowiadała zbiorowi P wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazami są elementy zbioru M: będzie to więc moc zbioru wszystkich możliwych podporządkowań elementów zbioru M elementom zbioru wszystkich liczb naturalnych (wskaźnikom), zatem

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{a}}.$$

Kładąc w szczególności $\mathfrak{m} = 2, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}$, otrzymamy wobec wyników poprzedniego art. wzory:

$$2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

W myśl definicyi potęgi, liczba kardynalna $\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ będzie odpowiadała zbiorowi wszystkich (ciągłych i nieciągłych) funkcyj rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. W następnym rozdziale udowodnimy, że zbiór ten już nie będzie mocy continuum.

ROZDZIAŁ V.

Nierówności dla liczb kardynalnych

1. Niech M i N będą dwa dane zbiory. Załóżmy, że zbiór N jest równej mocy z pewną częścią zbioru M, natomiast zbiór M nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru N.

Gdyby oba uważane zbiory były skończone, to, oznaczając odpowiednio przez $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ ich liczby kardynalne, mielibyśmy oczywiście nierówność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}.$$

Dla liczb kardynalnych pozaskończonych nie określiliśmy jeszcze, co oznacza podobna nierówność. Całkiem jednak naturalnem i wskazanem będzie przyjęcie następującej ogólnej definicyi:

Jeżeli M i N są dwa dane zbiory, $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$—ich liczby kardynalne, oraz jeżeli zbiór N jest równej mocy z pewną częścią zbioru M, ale zbiór M nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru N, to piszemy

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}, \text{ albo } \mathfrak{n} < \mathfrak{m}.$$

Jasnem jest, że do tych samych nierówności dla liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ doszlibyśmy, gdybyśmy zamiast zbiorów M i N wzięli za punkt wyjścia inne zbiory M_1 i N_1. byleby takie, iż $M_1 \sim M$ oraz $N_1 \sim N$.

Jasnem jest dalej, że nierówność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$$

wyklucza nierówność

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n},$$

a zarazem równość

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}.$$

Każde więc dwie liczby kardynalne mogą być połączone conajwyżej jednym z trzech znaków:

$$>, =, <.$$

Nie mamy jednak prawa już twierdzić, że każde dwie dane liczby kardynalne mogą być zawsze połączone jednym z tych trzech znaków. Aby to twierdzić, należałoby przedewszystkiem dowieść, że nie jest możliwym przypadek, w którym ani zbiór M nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru N, ani też zbiór N nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru M. Gdyby bowiem przypadek taki dla dwóch danych zbiorów M i N zachodził, to, w myśl przyjętych definicyj równości i nierówności liczb kardynalnych, nie moglibyśmy liczb kardynalnych, odpowiadających zbiorom M i N, połączyć żadnym z trzech znaków: $=, >, <$.

Dalej, należałoby jeszcze zbadać, co będzie wtedy, jeżeli każdy z dwóch danych zbiorów M i N jest równej mocy z pewną częścią drugiego.

Dopiero po rozstrzygnięciu tych dwóch kwestyj moglibyśmy wypowiedzieć się kategorycznie w sprawie tak zwanej trychotomii, czyli możności łączenia każdych dwóch danych liczb kardynalnych jednym z trzech znaków: $>, =, <$.

W każdym razie możemy już teraz twierdzić, że pewne liczby kardynalne dadzą się ze sobą porównywać co do wielkości, to znaczy łączyć jednym z wiadomych trzech znaków. Np., jeżeli $\mathfrak{e}$ oznacza liczbę kardynalną skończoną, zaś $\mathfrak{u}$—pozaskończoną, to w myśl powyższych definicyi będzie

$$\mathfrak{e} < \mathfrak{u}.$$

Podobnież, jeżeli $\mathfrak{u}$ oznacza liczbę kardynalną pozaskończoną, różną od $\mathfrak{a}$, to będzie:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{u}.$$

(Każdy bowiem zbiór nieskończony posiada część przeliczalną, w myśl art. 6-go Rozdz. II. Gdyby ów zbiór nieskończony był równej mocy z pewną częścią zbioru przeliczalnego, to musiałby być sam przeliczalny, wbrew założeniu, że $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{a}$. Stąd, w myśl definicyi nierówności, natychmiastowy wniosek, że $\mathfrak{a} < \mathfrak{u}$). Więc np. mamy nierówność:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Łatwo dowieść, że względność nierówności jest przechodnia, t. j. że związki

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{n} > \mathfrak{p}$$

pociągają za sobą:

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{p}.$$

Dla dowodu wystarczy oprzeć się na uwadze, że część części danego zbioru jest znowu częścią tegoż zbioru.

Zauważymy też, że nierówności między liczbami kardynalnemi nie posiadają wszystkich tych własności, co nierówności między liczbami skończonemi. Np. dla liczb skończonych nierówność $a > b$ pociąga za sobą zawsze nierówność: $a + c > b + c$, gdy tymczasem mamy np.:

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{a},$$

ale jednocześnie

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}.$$

Podobnież, mamy:

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{a}, \text{ a jednocześnie } \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{c} > 2, \text{ a jednocześnie } \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}},$$

i t. p., gdy tymczasem w obszarze liczb naturalnych podobne przypadki zachodzić nie mogą.

Jeżeli, w obszarze liczb skończonych, wszystkie iloczyny cząstkowe $p_n = u_1 u_2 \ldots u_n$ pewnego iloczynu nieskończonego

$$p = u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots$$

są stale mniejsze od pewnej liczby a, to jest zawsze $p \leqslant a$, tymczasem dla liczb kardynalnych mamy np.

$$\mathfrak{c} = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \ldots,$$

choć z drugiej strony stale

$$p_n = 2^n < \mathfrak{a}.$$

Podobnież w iloczynie

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} \ldots$$

mamy stale $p_n = \mathfrak{a}$. Wartości iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych nie można więc uważać jako granicę wartości odpowiednich iloczynów cząstkowych.

2. Udowodnimy obecnie, że *zbiór wszystkich możliwych części danego zbioru ma większą moc od samego zbioru.*

Niech M oznacza dany zbiór, P—jakąkolwiek daną część tego zbioru. Podporządkujmy każdemu elementowi m zbioru M liczbę $+1$ lub -1, zależnie od tego czy uważany element należy czy też nie należy do części P. W ten sposób każda część P zbioru M wyznacza pewną funkcyę elementów zbioru M, mogącą przyjmować tylko dwie różne wartości: $+1$ i -1.

Jasnem jest, że różnym częściom[1]) zbioru M będą odpowiadały różne takie funkcye; z drugiej strony każda taka funkcya będzie wyznaczała określoną część zbioru M, mianowicie część jego, utworzoną przez te wszystkie elementy, dla których wartością uważanej funkcyi jest jedność. Stąd, wobec definicyi potęgi liczb kardynalnych (art. 6 Rozdz. IV-go), wnioskujemy z łatwością, że jeżeli $\mathfrak{m}$ oznacza liczbę kardynalną zbioru M, to liczbą kardynalną zbioru wszystkich różnych części danego zbioru M, będzie

$$2^{\mathfrak{m}}.$$

Oznaczmy przez F zbiór wszystkich funkcyj $f(m)$, określonych dla elementów zbioru M i bezwzględnie równych jedności: liczbą kardynalną zbioru F jest oczywiście $2^{\mathfrak{m}}$. Oznaczmy przez F_1 część zbioru F, składającą się z tych wszystkich funkcyj $f(m)$, które dla jednego tylko elementu zbioru M są równe $+1$ (a dla pozostałych $= -1$). Jasnem jest, że zbiór F_1 jest równej mocy ze zbiorem M. Ten ostatni jest więc równej mocy z pewną częścią zbioru F.

Załóżmy, że zbiór F jest równej mocy z częścią M_1 zbioru M. Istniałaby więc odpowiedniość doskonała między zbiorem wszystkich funkcyj $f(m)$ bezwzględnie równych jedności, określonych dla zbioru M, a zbiorem M_1. Tę funkcyę $f(m)$ zbioru F, która w tej odpowiedniości jest podporządkowana elementowi μ zbioru M_1, oznaczmy przez $f(m, \mu)$.

Określimy teraz pewną funkcyę $\varphi(m)$ elementów zbioru M w następujący sposób. Dla każdego elementu μ zbioru M_1 połóżmy:

$$\varphi(\mu) = -f(\mu, \mu) \qquad (1)$$

jeżeli zaś m jest elementem zbioru M, nie należącym do zbioru M_1, to położymy

$$\varphi(m) = 1.$$

Będziemy mieli oczywiście dla każdego elementu m zbioru M:

$$|\varphi(m)| = 1,$$

a więc $\varphi(m)$ jest jedną z funkcyj zbioru F. Jako taka musi więc funkcya $\varphi(m)$, wobec założenia odpowiedniości doskonałej, być podporządkowana jednemu z elementów zbioru M_1, np. elementowi μ_0. W myśl przyjętego wyżej znakowania, mielibyśmy więc dla wszelkiego elementu m zbioru M:

$$\varphi(m) = f(m, \mu_0),$$

[1]) Przez różne części rozumiemy takie, których nie wszystkie elementy są jednakowe; zresztą różne części mogą posiadać elementy wspólne.

skąd, w szczególności, dla $m = \mu_0$:

$$\varphi(\mu_0) = f(\mu_0, \mu_0) \qquad (2)$$

Z drugiej strony wzór (1) daje dla $\mu = \mu_0$:

$$\varphi(\mu_0) = -f(\mu_0, \mu_0) \qquad (3)$$

Wzory (2) i (3), wobec $|f(\mu_0, \mu_0)| = 1$ są oczywiście sprzeczne. Dowodzi to fałszywości naszego założenia, że zbiór F jest równej mocy z pewną częścią zbioru M.

Ostatecznie więc zbiór M jest równej mocy z pewną częścią zbioru F, ale zbiór F nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru M. W myśl definicyi nierówności dla liczb kardynalnych wnosimy stąd, iż

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ (zarówno skończonej, jak i nieskończonej) zachodzi nierówność:

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

Stąd wynika też prawdziwość twierdzenia, wypowiedzianego na wstępie niniejszego artykułu.

Dla $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ udowodniona nierówność daje

$$2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}.$$

Łatwo dowieść, że lewa strona jest liczbą kardynalną, odpowiadającą zbiorowi wszystkich funkcyj rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. W samej rzeczy, wobec definicyi potęgi, liczbą kardynalną tego ostatniego zbioru jest

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

Wobec (art. 6-go Rozdz. IV-go)

$$\mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}}$$

i zasadniczych własności potęg (których szczegółowy dowód, nie nastręczający większych trudności, ale wymagający głębszego zastanowienia się, zalecamy czytelnikowi), mamy stąd:

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}},$$

a że $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, więc

$$\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

A więc: zbiór wszystkich funkcyj rzeczywistych zmiennej rzeczywistej (ciągłych i nieciągłych) ma moc $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}$, większą niż continuum. Ten sam wynik otrzymalibyśmy oczy-

wiście dla zbioru wszystkich (ciągłych i nieciągłych) funkcyj zmiennej zespolonej.

Poznaliśmy więc dotychczas trzy różne ilczby kardynalne pozaskończone:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < \mathfrak{f},$$

z których pierwsza odpowiada zbiorowi wszystkich liczb naturalnych, druga zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych, trzecia zbiorowi wszystkich funkcyj. Samo przez się nasuwa się teraz pytanie, czy między temi zasadniczemi liczbami kardynalnemi niema innych, w szczególności np., czy niema liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, któraby spełniała nierówności

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{m} < \mathfrak{c},$$

innemi słowy, czy istnieje zbiór mocy większej, niż zbiory przeliczalne, a jednocześnie mniejszej niż continua? Pytanie to, znane pod nazwą problematu continuum, również należy do tych, których nie udało się jeszcze dotąd rozstrzygnąć.

Zajmiemy się teraz pytaniem, ile jest różnych liczb kardynalnych pozaskończonych? Dotąd znamy tylko trzy. Łatwo jednak, opierając się na udowodnionej nierówności, zbudować cały ciąg nieskończony różnych liczb kardynalnych.

Połóżmy mianowicie

$$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{a} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m}^k = 2^{\mathfrak{m}_{k-1}}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Będziemy mieli, wobec nierówności $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{m}_3 < \ldots$$

Możnaby jednak zbudować nieskończenie wiele liczb kardynalnych, większych od wszystkich wyrazów wypisanego ciągu.

W następnym artykule udowodnimy, że zbiór wszystkich różnych liczb kardynalnych jest nieprzeliczalny.

3. **Lemmat.** Suma nieskończonego szeregu liczb kardynalnych stale rosnących jest większa od każdego ze składników.

Dowód. Niech

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$$

oznacza dany ciąg liczb kardynalnych stale rosnących i połóżmy

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots$$

Niech M_k oznacza zbiór, któremu odpowiada liczba kardynalna $\mathfrak{m}_k$, i niechaj będzie

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$$

Liczbą kardynalną zbioru S będzie oczywiście $\mathfrak{s}$. Każdy ze zbiorów M_k jest oczywiście częścią zbioru S. Powiadam, że zbiór S nie jest równej mocy z żadną częścią żadnego ze zbiorów M_k. Dla dowodu załóżmy, że przeciwnie, zbiór S jest równej mocy z pewną częścią zbioru M_p. Wówczas zbiór M_{p+1}, będący częścią zbioru S, byłby tembardziej równej mocy z pewną częścią zbioru M_p: nie mogłaby więc, w myśl definicyi nierówności liczb kardynalnych, zachodzić nierówność $\mathfrak{m}_{p+1} > \mathfrak{m}_p$, wbrew założeniu, że uważany ciąg jest stale rosnący.

A więc przy wszelkiem k zbiór M_k jest częścią zbioru S, ale zbiór S nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru M_k: stąd wniosek, że

$$\mathfrak{s} > \mathfrak{m}_k, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots)$$

co było do okazania.

Twierdzenie. Zbiór wszystkich różnych liczb kardynalnych jest nieprzeliczalny. Innemi słowy: Nie istnieje taki ciąg nieskończony zbiorów

$$M_1, M_2. M_3, \ldots,$$

iżby każdy dany zbiór M był równej mocy z jednym ze zbiorów wypisanego ciągu.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że istnieje taki zbiór przeliczalny, w którym są zawarte wszystkie liczby kardynalne. Ustawmy je w ciąg nieskończony

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$$

Połóżmy

$$\mathfrak{m}_{k_1} = \mathfrak{m}_1.$$

Ponieważ w ciągu $\mathfrak{m}_n$ zawarte są, jak zakładamy, wszystkie liczby kardynalne, więc znajdą się w nim z pewnością liczby kardynalne większe od $\mathfrak{m}_1$ (liczby takie, jak wiemy, istnieją: jedną z nich jest np. liczba $2^{\mathfrak{m}_1}$). Niech $\mathfrak{m}_{k_2}$ będzie pierwszą liczbą kardynalną naszego ciągu, większą od $\mathfrak{m}_1$. (Zauważymy, że nie przesądzamy tu bynajmniej pytania, czy istnieją w naszym ciągu wyrazy, które nie dadzą się ze sobą porównać: gdyby nawet wyrazy takie w naszym ciągu istniały, to liczba $\mathfrak{m}_{k_2}$, jako pierwszy wyraz naszego ciągu, większy od $\mathfrak{m}_1$, będzie w zupełności oznaczona). Oznaczmy dalej przez $\mathfrak{m}_{k_3}$ pierwszą liczbę kardynalną naszego ciągu, większą od $\mathfrak{m}_{k_2}$ i t. d. Zbudujemy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony liczb kardynalnych stale rosnących:

$$\mathfrak{m}_{k_1}, \mathfrak{m}_{k_2}, \mathfrak{m}_{k_3}, \ldots.$$

Powiadam, że niema liczby kardynalnej, któraby była większa od

wszystkich wyrazów wypisanego przed chwilą ciągu. Załóżmy dla dowodu, że liczba taka $\mathfrak{m}$ istnieje. Ponieważ w ciągu $\mathfrak{m}_n$ są zawarte, jak zakładamy, wszystkie liczby kardynalne, więc liczba $\mathfrak{m}$ byłaby jednym z wyrazów tego ciągu, np. wyrazem $\mathfrak{m}_p$. Wobec założenia nierówności

$$\mathfrak{m}_p > \mathfrak{m}_{k_n} \text{ (dla } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

wskaźnik p musiałby być różny od wszystkich wskaźników k_n, tworzących oczywiście ciąg rosnący, z wyrazem pierwszym $k_1 = 1$. Byłby więc wskaźnik p zawarty między dwoma kolejnemi wyrazami ciągu k_n, naprzykład:

$$k_{q-1} < p < k_q$$

W myśl definicyi ciągu k_n, jest $\mathfrak{m}_{k_q}$ pierwszym wyrazem ciągu $\mathfrak{m}_n$, większym od $\mathfrak{m}_{k_{q-1}}$. Przeczy to jednak nierówności

$$\mathfrak{m}_p > \mathfrak{m}_{k_{q-1}}, \quad \text{oraz } p < k_q .$$

Dowiedliśmy zatem, że niema liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, większej od każdego z wyrazów $\mathfrak{m}_{k_n}$. Połóżmy jednak

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_{k_1} + \mathfrak{m}_{k_2} + \mathfrak{m}_{k_3} + \ldots$$

Ponieważ szereg nieskończony po prawej stronie jest stale rosnący, więc, w myśl naszego lemmatu, liczba $\mathfrak{s}$ jest większa od każdego ze składników $\mathfrak{m}_{k_n}$. Stąd sprzeczność.

Założenie, że istnieje ciąg nieskończony, w którym są zawarte wszystkie liczby kardynalne, doprowadza zatem do sprzeczności.

4. Zajmiemy się obecnie wywodem pewnego twierdzenia, mającego szerokie zastosowanie przy wyznaczaniu mocy zbiorów.

Załóżmy, że dany zbiór Z jest sumą trzech zbiorów A_1, B_1 i C_1, i że przytem $Z \sim C_1$.

Można więc ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów Z i C_1. Przypuśćmy, że w tej odpowiedniości częściom A_1, B_1 i C_1 zbioru Z odpowiadają części A_2 B_2 i C_2 zbioru C_1. Mamy więc

$$Z = A_1 + B_1 + C_1, \quad Z \sim C_1$$

$$C_1 = A_2 + B_2 + C_2,$$

przyczem $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$, $C_1 \sim C_2$.

Wobec $Z \sim C_1$ oraz $C_1 \sim C_2$ mamy: $Z \sim C_2$. Istnieją więc części A_3, B_3, C_3, zbioru C_2, takie, iż mamy:

$$C_2 = A_3 + B_3 + C_3,$$

przyczem:

$$A_1 \sim A_3, \; B_1 \sim B_3, \; C_1 \sim C_3 .$$

Będzie więc znowu $Z \sim C_3$. Rozumując w ten sposób wciąż dalej, otrzymamy trzy ciągi nieskończone zbiorów: A_n, B_n, C_n, przyczem będzie stale:

$$C_{n-1} = A_n + B_n + C_n\ ,$$

$$A_1 \sim A_n,\ B_1 \sim B_n,\ C_1 \sim C_n\ ,$$

jak również

$$Z \sim C_n\ ,$$

dla $n = 2, 3, 4, \ldots$

Ze sposobu, w jaki utworzyliśmy ciągi A_n i B_n, wynika natychmiast, że elementy każdego A_n są różne od elementów każdego B_n. Połóżmy

$$S = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + A_3 + B_3 + \ldots$$

Będzie to oznaczony w zupełności zbiór, którego elementy będą wszystkie (różnemi) elementami zbioru Z, ale niekoniecznie naodwrót. Usuńmy wszystkie elementy zbioru S ze zbioru Z. Pozostały zbiór — który zresztą może być pusty, t. j. nie zawierać żadnego elementu — oznaczmy przez D. Będziemy mieli oczywiście:

$$Z = D + S,$$

czyli

$$Z = D + A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + A_3 + \ldots \qquad (1)$$

Wobec $A_1 \sim A_n$ mamy oczywiście

$$A_1 \sim A_2,\ A_2 \sim A_3,\ A_3 \sim A_4 \text{ i t. d.},$$

zatem też, wobec (1):

$$Z \sim D + A_2 + B_1 + A_3 + B_2 + A_4 + \ldots \qquad (2)$$

Równość (1) wskazuje, że prawa strona wzoru (2) przedstawia różnicę $Z - A_1$, czyli sumę $B_1 + C_1$: mamy więc, w myśl (2):

$$Z \sim B_1 + C_1\ .$$

Dowiedliśmy więc, że warunki

$$Z = A_1 + B_1 + C_1 \text{ oraz } Z \sim C_1$$

pociągają za sobą zawsze wzór

$$Z \sim B_1 + C_1\ .$$

Twierdzenie to możemy jeszcze wyrazić w formie: Jeżeli dany zbiór Z jest równej mocy z pewną swoją częścią C_1, to Z jest też równej mocy z każdą swą częścią C, dla której C_1 jest częścią.

W samej rzeczy, wystarczyłoby tylko przyjąć $Z - C = A_1$ oraz

$C - C_1 = B_1$. (W przypadku $C = Z$ lub $C = C_1$ twierdzenie byłoby oczywiste).

Twierdzenie F. Bernsteina. Jeżeli zbiór M jest równej mocy z częścią N_1 zbioru N, zaś zbiór N—z częścią M_1 zbioru M, to $M \sim N$.

Dowód. Możemy naturalnie założyć, że M_1 i N_1 są właściwemi częściami odpowiednich zbiorów, gdyż w razie przeciwnym prawdziwość twierdzenia byłaby oczywista.

Połóżmy

$$M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2.$$

Ponieważ $M_1 \sim N$, więc da się ustalić odpowiedniość doskonała między elementami zbiorów M_1 i N. Przypuśćmy, że w tej odpowiedniości częściom N_1 i N_2 zbioru N odpowiadają części C_1 i B_1 zbioru M_1. Będzie więc

$$M_1 = C_1 + B_1, \quad C_1 \sim N_1 \sim M.$$

Wobec $M = M_1 + M_2$ mamy ostatecznie:

$$M = M_2 + B_1 + C_1, \text{ przytem } M \sim C_1.$$

Pociąga to za sobą, jak dowiedliśmy:

$$M \sim B_1 + C_1 = M_1$$

czyli

$$M \sim M_1 \sim N, \text{ skąd } M \sim N, \text{ c. b. d. o.}$$

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że jeżeli mamy dwa zbiory M i N, których odpowiednie liczby kardynalne są $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$, i jeżeli zbiór N jest równej mocy z pewną częścią zbioru M, to:

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$$

i naodwrót (znak $\geqslant$ oznacza: $>$ lub $=$).

Opierając się na tej uwadze, łatwo dowieść, że nierówności

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$$

oraz

$$\mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}_1$$

pociągają za sobą nierówność:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n} + \mathfrak{n}_1 .$$

W samej rzeczy, oznaczmy przez M, N, M_1 i N_1 zbiory, których liczbami kardynalnemi są odpowiednio $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$ i $\mathfrak{n}_1$.

Nierówność $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$ wyraża, że zbiór M_1 jest równej mocy z pewną częścią zbioru M, zaś nierówność $\mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}_1$—że zbiór N_1 jest równej mo-

cy z pewną częścią zbioru N. Będzie więc zbiór $M_1 + N_1$ równej mocy z pewną częścią zbioru $M + N$, skąd nierówność, o dowód której chodzi.

Warto jednak zaznaczyć, iż nie posiadamy dotąd dowodu na to, że z nierówności

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$$

oraz

$$\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{n}_1$$

wynika zawsze nierówność:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 > \mathfrak{n} + \mathfrak{n}_1 .$$

Możemy też teraz zdać sobie dokładnie sprawę z tego, na czem polega problemat trychotomii (art. 1). Załóżmy, że liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ dwóch danych zbiorów M i N nie dadzą się ze sobą połączyć żadnym ze znaków $>$, $=$, $<$. Gdyby zbiór M był równej mocy z pewną częścią zbioru N, mielibyśmy, jak wiemy: $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, podobnież, gdyby zbiór N był równej mocy z pewną częścią zbioru M, mielibyśmy $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$. Jeżeli więc liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nie dadzą się połączyć żadnym z wiadomych trzech znaków, to ani zbiór M nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru N, ani też zbiór N nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru M.

Zatem, aby rozstrzygnąć problemat trychotomii, potrzeba i wystarcza okazać, że nie istnieją takie dwa zbiory M i N, z których żaden nie byłby równej mocy z pewną częścią drugiego.

5. Zajmiemy się obecnie zastosowaniami twierdzenia, udowodnionego w poprzednim artykule. Jako pierwsze zastosowanie obliczymy moc mnogości wszystkich funkcyj ciągłych.

Niech $f(x)$ oznacza funkcyę, ciągłą dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x. Ustawmy w jeden ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne

$$w_1, w_2, w_3, \ldots$$

i weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony

$$(u_1, u_2, u_3, \ldots),$$

gdzie $u_n = f(w_n)$.

Każdej funkcyi ciągłej $f(x)$ odpowiada oznaczony w zupełności ciąg nieskończony u_n o wyrazach rzeczywistych. Powiadam dalej, że różnym funkcyom ciągłym odpowiadają różne takie ciągi.

Dla dowodu załóżmy, że funkcyom ciągłym $f(x)$ i $\varphi(x)$ odpowia-

da jeden i ten sam ciąg u_n. Niech x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą. Możemy zawsze wyznaczyć ciąg v_n o wyrazach wymiernych, zmierzający do x (wystarczy wziąć np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby x). Z uwagi, że funkcyom $f(x)$ i $\varphi(x)$ odpowiada jeden i ten sam ciąg u_n, będziemy przy wszelkiem n mieli

$$f(v_n) = \varphi(v_n),$$

gdyż każdy wyraz v_n, jako liczba wymierna, jest jedną z liczb w_k. Wobec założenia ciągłości naszych funkcyj, równość

$$\lim_{n=\infty} v_n = x$$

pociągnie za sobą równości:

$$\lim_{n=\infty} f(v_n) = f(x), \quad \lim_{n=\infty} \varphi(v_n) = \varphi(x),$$

skąd, wobec $f(v_n) = \varphi(v_n)$:

$$f(x) = \varphi(x).$$

Ponieważ równość tę możemy udowodnić dla każdego rzeczywistego x, więc funkcye $f(x)$ i $\varphi(x)$ nie są różne. Różnym funkcyom ciągłym muszą więc odpowiadać różne ciągi u_n. Możnaby też wobec tego powiedzieć, że każda funkcya ciągła jest scharakteryzowana ciągiem u_n, a więc przeliczalną mnogością warunków.

Wiemy, że zbiór C wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych jest mocy continuum (art. 5, Rozdz. IV). Każdej funkcyi ciągłej $f(x)$ odpowiada oznaczony w zupełności element zbioru C, przytem, jak dowiedliśmy, różnym funkcyom ciągłym odpowiadają różne elementy zbioru C. Wynika stąd, że zbiór M wszystkich funkcyj ciągłych jest równej mocy z pewną częścią zbioru C; oznaczając przez $\mathfrak{m}$ liczbę kardynalną zbioru M, będziemy zatem mieli nierówność:

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Weźmy teraz pod rozwagę zbiór P wszystkich (oczywiście ciągłych) funkcyj

$$f(x) = x + a,$$

gdzie a jest pewną stałą.

Każdej funkcyi $x + a$ zbioru P odpowiada pewna liczba rzeczywista a i naodwrót. Zbiór P jest więc mocy continuum, a że zbiór ten jest częścią zbioru M, więc mamy nierówność:

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{c}.$$

Nierówności $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$ oraz $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{c}$ dają równość:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}.$$

Dowiedliśmy więc, że zbiór wszystkich funkcyj ciągłych (jednej zmiennej rzeczywistej) jest mocy continuum.

Zbiór wszystkich funkcyj (ciągłych i nieciągłych) jest, jak wiemy, mocy większej niż $\mathfrak{c}$.

6. Wyznaczmy teraz moc mnogości M wszystkich różnych typów porządkowych, odpowiadających zbiorom przeliczalnym. Typy takie będziemy nazywali dla krótkości poprostu typami przeliczalnemi.

W myśl twierdzenia z art. 5-go Rozdz. III-go, możemy każdemu typowi porządkowemu przeliczalnemu podporządkować pewien zbiór liczb wymiernych, który, uporządkowany według wielkości, będzie należał do uważanego typu. Różnym typom przeliczalnym będą przytem podporządkowane różne zbiory liczb wymiernych. Jasnem jest więc, że mnogość M wszystkich typów przeliczalnych jest równej mocy z pewną częścią mnogości P wszystkich zbiorów liczb wymiernych. Mnogość P, jako mnogość wszystkich części zbioru o mocy $\mathfrak{a}$, jest (art. 2) mocy $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$. Wynika stąd, że liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ zbioru M spełnia nierówność:

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Powiadam z drugiej strony, że zbiór M posiada część C mocy continuum.

Niech

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

oznacza rozwinięcie liczby dodatniej $x \leqslant 1$ na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony. Połóżmy

$$\xi = {}^*\omega + \omega + (a_1 + 1) + {}^*\omega + \omega + (a_2 + 1) + {}^*\omega + \omega + \\ + (a_3 + 1) + \ldots$$

—będzie to wyznaczony w zupełności przez liczbę x typ porządkowy.

Łatwo jednak widzieć, że i naodwrót, mając typ ξ, potrafimy wyznaczyć liczbę x.

Jeżeli po danym elemencie g pewnego zbioru uporządkowanego następują bezpośrednio kolejne elementy $g_1, g_2, \ldots, g_k$, ale element g_k nie posiada już swego następnego, to będziemy mówili, że element g posiada k kolejnych elementów następnych.

Oznaczmy przez C zbiór wszystkich typów porządkowych ξ (oczywiście przeliczalnych), podporządkowanych według powyższej umowy

liczbom rzeczywistym przedziału (0, 1). Niech ξ oznacza dany element zbioru C.

Wyznaczmy pierwszy element zbioru ξ, nie posiadający swego poprzedniego, i oznaczmy przez a_1 liczbę ($\geqslant 0$) elementów kolejno po nim następujących. Wyznaczmy dalej drugi (z kolei) element zbioru ξ, nie posiadający swego poprzedniego, i oznaczmy przez a_2 liczbę kolejnych jego elementów następnych i t. d. Czytelnik udowodni z łatwością, że w uważanem podporządkowaniu typowi ξ odpowiada liczba

$$x = 0, a_1 \, a_2 \, a_3 \, . \, . \, .$$

Istnieje więc odpowiedniość doskonała między zbiorem C a zbiorem liczb rzeczywistych przedziału (0, 1). Stąd wniosek, że C jest mocy continuum.

Zbiór M posiada więc część C mocy $\mathfrak{c}$, skąd wynika, że

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{c}.$$

Nierówności $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$ oraz $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{c}$ pociągają za sobą równość:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}.$$

Dowiedliśmy więc, że zbiór wszystkich różnych typów porządkowych przeliczalnych jest mocy continuum.

7. Załóżmy teraz, że zbiór P, mocy continuum, jest sumą dwóch zbiorów

$$P = P_1 + P_2 .$$

Zbiór P jest, jak wiemy, równej mocy ze zbiorem Z wszystkich układów dwóch liczb rzeczywistych (x, y). Ustalmy więc odpowiedniość doskonałą między elementami zbioru Z a elementami zbioru $P_1 + P_2$.

Możliwe są tutaj tylko dwa następujące przypadki:

1) Istnieje takie $y = y_0$, że przy wszelkiem rzeczywistem x układowi (x, y_0) odpowiada element zbioru P_1.

2) Przy każdem y istnieje przynajmniej jedna liczba rzeczywista x_y taka, że układowi (x_y, y) odpowiada element zbioru P_2.

W pierwszym przypadku oczywiście zbiór P_1 posiadać będzie część mocy continuum, w drugim—taką część posiadać musi zbiór P_2.

Lecz każdy ze zbiorów P_1 i P_2 jest sam częścią zbioru P o mocy continuum. Stąd, opierając się na twierdzeniu Bernsteina, wysnuwamy z łatwością wniosek, że jeden przynajmniej ze zbiorów P_1 i P_2 jest mocy continuum.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli zbiór mocy continuum roz-

bijemy na dwa zbiory, to przynajmniej jeden z tych zbiorów będzie mocy continuum.

Twierdzenie to dałoby się z łatwością uogólnić na dowolną (skończoną) liczbę składników [1].

Możemy jeszcze twierdzenie nasze wyrazić w ten sposób:

„Jeżeli dwie liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ spełniają równość

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{c},$$

to przynajmniej jedna z tych liczb jest równa $\mathfrak{c}$".

Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy twierdzenie:

Równość

$$2\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$$

pociąga za sobą równość:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}.$$

Mamy tu więc twierdzenie, tyczące się niejako dzielenia liczb kardynalnych.

---

[1]) Zobacz mój komunikat: „O pewnej własności continuuum". Spraw. Tow. Nauk. Warsz. Tom 4 (1911), str. 55.

ROZDZIAŁ VI.

Mnogości punktowe przestrzeni m-wymiarowej.

1. Nazywamy punktem przestrzeni m-wymiarowej (albo punktem analitycznym rozciągłości m-wymiarowej) każdy układ

$$x', x'', \ldots, x^{(m)}$$

m danych liczb rzeczywistych [1].

Liczby (1) nazywamy spółrzędnemi punktu

$$p = (x', x'', \ldots, x^{(m)}),$$

a mianowicie: x' — pierwszą spółrzędną, x'' — drugą, . . . , $x^{(m)}$ — m-tą spółrzędną.

Dwa punkty uważamy wtedy i wtedy tylko za identyczne, jeżeli odpowiednie spółrzędne są równe.

W dalszym ciągu, mówiąc o punktach, będziemy mieli na myśli zawsze punkty przestrzeni m-wymiarowej — o ile nie zrobimy specyalnej uwagi co do szczególnej wartości liczby m.

W całym niniejszym rodziale będziemy mieli na względzie tylko porządkowe własności przestrzeni m-wymiarowej.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych będziemy traktowali jako zbiór uporządkowany ciągły, posiadający część przeliczalną wszędziegęstą i nie posiadający ani pierwszego ani ostatniego elementu. O za-

---

[1]) Jak ważnem w zastosowaniach jest pojęcie punktu analitycznego, dowodzi już chociażby fakt, że dłuższy ustęp, poświęcony temu pojęciu znajdujemy w pracy S. Zaremby: „Pogląd na historyę rozwoju i stan obecny teoryi równań fizyki". Wiadomości matematyczne, T. XIII, str. 150 i nast.

dnych działaniach arytmetycznych na liczbach rzeczywistych, a w szczególności o różnicy takich liczb nie będzie tu mowy.

O ciągu nieskończonym liczb rzeczywistych x_n będziemy mówili, że zmierza do granicy x, jeżeli do każdej pary liczb a i b takich, iż

$$a < x < b,$$

da się dobrać taki wskaźnik ν, aby nierówność

$$n > \nu$$

pociągała za sobą stale nierówności:

$$a < x_n < b.$$

Jasnem jest, że, w myśl tej definicyi, żaden ciąg nieskończony nie może posiadać dwóch różnych granic. W samej rzeczy, załóżmy, że pewien ciąg x_n posiada dwie różne granice x i x', i niech np. będzie $x < x'$.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, jest, jak wiemy, wszędziegęsty: możemy więc wyznaczyć liczbę c taką, iż

$$x < c < x'.$$

Skoro x jest granicą ciągu x_n, to musi być, w myśl przyjętej definicyi, dla dostatecznie wielkich n stale

$$x_n < c;$$

z drugiej zaś strony, skoro x' też spełnia definicyę granicy, musi być dla dostatecznie wielkich n stale

$$c < x_n .$$

Otrzymane nierówności są oczywiście sprzeczne, skąd wniosek, że żaden ciąg nie może posiadać dwóch różnych granic.

Łatwo jednak widzieć, że nie każdy ciąg posiada granicę: nie posiada jej np. ciąg o wyrazach, naprzemian równych liczbom a i b, gdzie $a \neq b$.

Powiadam, że przyjęta obecnie definicya granicy obejmuje, jako przypadek szczególny, definicyę granicy ciągu podstawowego, daną w art. 6-tym Rozdz. III-go.

W samej rzeczy, jeżeli x_n jest ciągiem rosnącym, zaś x jego granicą wedle obecnej definicyi, to musi być stale

$$x_n < x;$$

gdyż gdyby np. dla $n = p$ było

$$x_p \geqslant x,$$

to mielibyśmy $x_{p+1} > x$ i, obierając w szczególności $b = x_{p+1}$, mielibyśmy dla $n > p$ stale

$$x_n > b,$$

gdy tymczasem, w myśl definicyi granicy, musi dla dostatecznie wielkich wskaźników być

$$x_n < b,$$

skoro $b > x$.

Jest więc liczba x liczbą większą od każdego z wyrazów ciągu x_n. Powiadam, że jest ona pierwszą liczbą, większą od każdego x_n. Gdyby bowiem było przy wszelkiem n

$$x_n < x' < x,$$

to znów, kładąc $a = x'$, otrzymalibyśmy sprzeczność z definicyą granicy.

Liczba, która jest granicą ciągu podstawowego, rosnącego—według obecnej definicyi, będzie nią więc i według definicyi z Rozdz. III-go. Ale i naodwrót. Niech bowiem x oznacza pierwszą liczbę, większą od każdego z wyrazów ciągu rosnącego x_n, i niech a i b będą dowolne dwie liczby takie, iż

$$a < x < b.$$

Istnieje wskaźnik p taki, iż

$$x_p \geqslant a,$$

gdyż, gdyby przy wszelkiem n było

$$x_n < a,$$

to x nie byłoby pierwszą liczbą, większą od wszystkich x_n.

Dla $n > p$ będziemy oczywiście mieli

$$x_n > x_p \geqslant a$$

(gdyż ciąg jest rosnący), nadto stale $x_n < x < b$. Jest więc dla $n > p$ stale

$$a < x_n < b,$$

skąd wniosek, że x jest granicą ciągu x_n też wedle obecnej definicyi.

Dowiedliśmy więc, że obecna definicya granicy jest dla ciągów podstawowych rosnących równoważna z przyjętą w Rozdz. III-im. Tego samego dowiedlibyśmy dla ciągów podstawowych malejących.

Jeżeli x jest granicą ciągu x_n, to będziemy pisali:

$$x = \lim_{n=\infty} x_n.$$

2. **Definicya.** Punkt przestrzeni m-wymiarowej $p = (x', x'', \ldots, x^{(m)})$ nazywamy granicą ciągu nieskończonego punktów

$$p_n = (x'_n, x''_n, \ldots, x_n^{(m)}),$$

jeżeli zachodzi każda z równości:

$$\lim_{n=\infty} x_n^{(k)} = x^{(k)}, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots m.$$

Ciągi punktów, posiadające granicę, nazywamy ciągami zbieżnemi.

Nazywać będziemy miejscem skupienia punktów danego zbioru P każdy punkt (należący do P lub nie), który jest granicą ciągu nieskończonego, wyjętego z P (t. j. takiego ciągu, którego wszystkie wyrazy są elementami zbioru P).

Z definicyi granicy wynika, w szczególności, dla przestrzeni jednowymiarowej, że jeżeli punkt g jest miejscem skupienia zbioru liczb rzeczywistych P, to wewnątrz każdego przedziału (a, b) takiego, iż

$$a < g < b,$$

można wyznaczyć przynajmniej jeden element zbioru P, różny od g Powiadam, że twierdzenie to daje się odwrócić, że mianowicie:

Jeżeli wewnątrz każdego przedziału (a, b), wewnątrz którego leży liczba g, można wyznaczyć przynajmniej jednę liczbę $x \neq g$, należącą do danego zbioru liczb P, to g jest miejscem skupienia zbioru P.

Dowód. Wyznaczmy dwa ciągi liczb wymiernych, zmierzające do g: jeden rosnący u_n, drugi malejący v_n, Będzie stale

$$u_n < g < v_n.$$

W myśl założenia, można więc będzie przy wszelkiem danem n wyznaczyć liczbę x_n, należącą do zbioru P, różną od g i taką, iż

$$u_n < x_n < v_n.$$

Powiadam, że g będzie granicą ciągu x_n.

W samej rzeczy, niech (a, b) oznacza dowolny dany przedział, taki, iż

$$a < g < b.$$

Ponieważ ciągi u_n i v_n zmierzają do g, więc przy pewnem $n = p$ będzie

$$a < u_p \quad \text{oraz} \quad v_p < b.$$

Dla $n > p$ będzie oczywiście stale

$$u_p < u_n < x_n < v_n < v_p,$$

gdyż ciąg u_n jest rosnący, zaś ciąg v_n — malejący. Będzie więc dla $n > p$ stale

$$a < x_n < b,$$

co dowodzi, że $\lim x_n = g$.

Dowiedliśmy naszego twierdzenia.

Punkt g danego zbioru P, który jest zarazem miejscem skupienia tego zbioru, nazywamy jego punktem granicznym, zaś punkt danego zbioru P, który nie jest jego miejscem skupienia, nazywamy punktem odosobnionym uważanego zbioru.

W szczególności, dla zbiorów jednowymiarowych z definicyi tej wynika, że jeżeli g jest punktem odosobnionym, to istnieje taki przedział (a, b), wewnątrz którego znajduje się g, ale prócz g niema żadnego innego elementu zbioru P.

3. Zbiór liczb rzeczywistych nazywamy ograniczonym, jeżeli wszystkie jego elementy są zawarte wewnątrz pewnego przedziału (a,b).

Lemmat. *Z każdego zbioru ograniczonego, zawierającego nieskończenie wiele liczb rzeczywistych, można wyjąć ciąg zbieżny.*

Dla dowodu naszego lemmatu rozróżnimy dwa przypadki.

1) W zbiorze naszym istnieje tylko skończona liczba różnych liczb. Wobec tego, że jednak sam zbiór jest, w myśl założenia, nieskończony, musiałoby w tym przypadku istnieć w naszym zbiorze nieskończenie wiele elementów, równych jednej i tej samej liczbie. Z elementów tych możnaby utworzyć ciąg nieskończony, który byłby oczywiście zbieżny (granicą jego byłaby wspólna wartość wszystkich wyrazów).

2) W zbiorze naszym liczba różnych liczb jest nieskończenie wielka. W tym razie istniałaby oczywiście część H naszego zbioru, przedstawiająca zbiór nieskończony samych różnych liczb. Powiadam, że ze zbioru H można wyjąć ciąg podstawowy.

Załóżmy, że ze zbioru H nie da się wyjąć ciąg nieskończony rosnący. Znaczy to, że zarówno sam zbiór H, jakoteż i każda część jego posiada element największy (bo w przeciwnym razie możnaby w tej części zbioru H wyznaczyć element większy od każdego danego jej elementu, a więc zbudować ciąg nieskończony, stale rosnący).

Usuńmy ów największy element u_1 zbioru H. Pozostały zbiór nieskończony, jako część zbioru H, znów będzie posiadał element największy u_2. Usuńmy go znowu, a w pozostałym zbiorze nieskończo-

nym wyznaczmy element największy u_3 i t. d. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony malejący

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

wyjęty ze zbioru H.

W każdym więc razie ze zbioru H da się wyjąć ciąg podstawowy. Ciąg ten będzie ograniczony, gdyż sam zbiór H jest ograniczony. Lecz każdy ciąg podstawowy ograniczony jest zbieżny, gdyż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest ciągły (zob. art. 7 Rozdz. III).

Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Każdy zbiór ograniczony P, zawierający nieskończenie wiele różnych punktów, posiada conajmniej jedno miejsce skupienia.

Zbiór punktów nazywamy ograniczonym, jeżeli wszystkie spółrzędne wszystkich punktów uważanego zbioru tworzą ograniczony zbiór liczb.

Przeprowadzimy dowód twierdzenia np. dla przestrzeni trójwymiarowej: myśl dowodu będzie ta sama dla wszelkiej liczby wymiarów.

Z przyjętej w art. 1-ym definicyi granicy ciągu liczb rzeczywistych wynika, że możemy ją wysłowić jeszcze w ten sposób:

Liczba x jest granicą ciągu x_n, jeżeli przy wszelkich a i b takich, iż

$$a < x < b,$$

nierówność

$$a < x_n < b$$

nie jest spełniona conajwyżej przez skończoną liczbę różnych wskaźników n.

Wynika stąd natychmiast, że wartość granicy nie zależy od porządku wyrazów ciągu i że jeżeli z danego ciągu zbieżnego wyjmiemy nowy, to ten wyjęty ciąg, o ile będzie nieskończony, będzie zbieżny i przytem do tej samej granicy.

Niech P oznacza dany zbiór ograniczony, zawierający nieskończenie wiele różnych punktów. Weźmy pod rozwagę zbiór pierwszych spółrzędnych punktów zbioru P. Ze zbioru tego da się, w myśl naszego lemmatu, wyjąć ciąg zbieżny a_n'. Niech

$$p_n' = (a_n', a_n'', a_n''')$$

będą punkty zbioru P, odpowiadające wyjętemu ciągowi a'_n.

Ze zbioru nieskończonego wszystkich wyrazów ciągu a''_n wyjmijmy, w myśl naszego lemmatu, ciąg zbieżny b''_n i oznaczmy przez

$$p_n'' = (b_n', b_n'', b_n''')$$

ciąg odpowiednich punktów zbioru P. Ciąg b_n' jest oczywiście ciągiem wyjętym z ciągu a_n', a więc zbieżność jego jest zapewniona.

Weźmy wreszcie pod rozwagę zbiór wszystkich wyrazów ciągu b_n'''. Ze zbioru tego wyjmijmy ciąg zbieżny c_n'''. Oznaczając przez

$$p_n''' = (c_n', c_n'', c_n''')$$

odpowiedni ciąg punktów zbioru P, wnioskujemy z łatwością, jak wyżej, że każdy z ciągów c_n', c_n'', c_n''' jest zbieżny. Zbieżny jest więc i sam ciąg punktów p_n''', wyjęty ze zbioru P. Granica tego ciągu będzie miejscem skupienia zbioru P.

4. Zbiór punktów, zawierający wszystkie swoje miejsca skupienia, nazywamy z a m k n i ę t y m.

Zbiór zamknięty nazywamy s p ó j n y m (bien enchaîné, zusammenhängend), jeżeli się nie da rozbić na dwa zbiory zamknięte, nie posiadające wspólnych elementów.

Zbiór przestrzeni m-wymiarowej, który jest ograniczony, zamknięty, spójny i zawiera więcej niż jeden punkt, nazywamy c o n t i n u u m m-w y m i a r o w e m (C a n t o r).

Udowodnimy, że dla przestrzeni jednowymiarowej definicya ta jest równoważna podanej w art. 8-ym Rozdz. III-go.

Niech więc X oznacza zbiór liczb rzeczywistych, ktory jest ograniczony, zamknięty, spójny i zawiera więcej, niż jednę liczbę.

Istnieją oczywiście liczby, mniejsze od każdego z elementów naszego zbioru (gdyż zbiór X jest, jak zakładamy, ograniczony). Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy A wszystkie liczby rzeczywiste, mniejsze od każdego z elementów zbioru X. Załóżmy, że klasa A posiada element największy g. Oznaczając przez b dowolną liczbę $> g$, mielibyśmy wewnątrz przedziału (g, b) przynajmniej jeden element x zbioru X, gdyż w przeciwnym razie istniałyby liczby większe od g, należące do klasy A. Lecz stąd, w myśl twierdzenia z art. 2-go, byłaby liczba g miejscem skupienia zbioru X, a więc też elementem tego zbioru, który jest przecież zamknięty. Sprzeciwia się to jednak założeniu, że g należy do klasy A.

Zatem w klasie tej niema elementu ostatniego: wobec tego, z powodu ciągłości zbioru liczb rzeczywistych, w klasie B musi istnieć element pierwszy, który, jak łatwo widzieć, będzie zarazem pierwszym elementem zbioru X (gdyż, gdyby element ten do X nie należał, byłby liczbą mniejszą od każdego elementu zbioru X, czyli liczbą klasy A). Dowiedliśmy więc, że zbiór X posiada element pierwszy a: zupełnie tak samo dowiedlibyśmy, że posiada on też element ostatni b. Elementy a i b są różne, gdyż zakładamy, że X zawiera więcej, niż jednę liczbę.

Powiadam, że każda liczba przedziału (a, b) jest elementem zbio-

ru X. Załóżmy dla dowodu, że liczba c, leżąca wewnątrz przedziału (a, b), nie jest elementem zbioru X. Podzielmy zbiór nasz na dwa zbiory X_1 i X_2, zaliczając do X_1 wszystkie te elementy zbioru X, które są$<c$, zaś do zbioru X_2—wszystkie te elementy zbioru X, które są $> c$. Zbiory X_1 i X_2 nie posiadają oczywiście wspólnych elementów. Powiadam, że zbiory te są zamknięte. Weźmy np. ciąg x_n elementów zbioru X_1, zmierzający do granicy x. Wyrazy x_n są zarazem elementami zbioru X, a że zbiór ten jest zamknięty, więc x musi być jego elementem. Gdyby x należało do zbioru X_2, a więc było $x > c$, to wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ musiałoby dla dostatecznie wielkich n być $x_n > c$—wbrew założeniu, że x_n należą do zbioru X_1, Musi więc x należeć do zbioru X_1, co dowodzi, że zbiór ten jest zamknięty. Tak samo dowiedlibyśmy, że zbiór X_2 jest zamknięty.

Zbiór X możnaby więc rozbić na dwa zbiory zamknięte X_1 i X_2, nie posiadające wspólnych elementów, co sprzeciwia się założeniu o spójności zbioru X.

Dowiedliśmy więc, że dla przestrzeni jednowymiarowej zbiór ograniczony, zamknięty, spójny, zawierający więcej niż jeden element, jest zbiorem liczb pewnego przedziału, z włączeniem granic. Ale, oczywiście i naodwrót; dowodu wymaga conajwyżej chyba tylko spójność zbioru wszystkich liczb pewnego przedziału (z włączeniem granic).

Niech więc X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówność

$$a \leqslant x \leqslant b, \text{ gdzie } a<b\,.$$

Załóżmy, że zbiór ten da się rozbić na dwa zbiory zamknięte X_1 i X_2, nie posiadające wspólnych elementów.

Przypuśćmy, że liczba a należy do zbioru X_1. Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy A wszystkie liczby, mniejsze od każdej z liczb zbioru X_2. W klasie A istnieje conajmniej jeden element zbioru X, mianowicie a; w klasie B również muszą się znajdować elementy zbioru X, gdyż w przeciwnym razie zbiór X_2 byłby pusty. Jeżeli więc oznaczymy przez g ostatni element klasy A, ewentualnie pierwszy element klasy B, to będzie

$$a \leqslant g \leqslant b.$$

Element g, o ile należy do klasy A, jest miejscem skupienia elementów zbioru X_2 (gdyż w każdym przedziale (g, c), gdzie $c > g$, muszą się znajdować elementy zbioru X_2: w przeciwnym razie g nie byłoby ostatnim elementem klasy A). Jest to więc element wspólny zbio-

rom X_1 i X_2, co być nie może. Musi więc g należeć do klasy B, zatem, jak łatwo widzieć, być elementem zbioru X_2 (gdyż inaczej, g jeszcze byłoby mniejsze od każdego z elementów zbioru X_2, czyli musiałoby być zaliczone do klasy A). Lecz wtedy, jak łatwo widzieć, byłoby g miejscem skupienia zbioru X, (gdyż każda liczba przedziału (a, b), mniejsza od g, należy do X_1). Byłoby więc znowu g wspólnym elementem zbiorów X_1 i X_2.

Zbiór X jest więc spójny.

Dowiedliśmy zatem w zupełności, że continuum jednowymiarowe jest zbiorem liczb pewnego przedziału (z włączeniem granic) i naodwrót.

Obecna definicya continuum jednowymiarowego jest więc równoważna definicyi continuum liniowego, podanej w rozdziale III-im. Pojęcie continuum m-wymiarowego jest więc uogólnieniem pojęcia continuum liniowego.

Co się tyczy samego pojęcia spójności, to zauważymy, że jest ono stosowalne też do zbiorów niezamkniętych, jak to zobaczymy w jednym z późniejszych artykułów.

5. Jeżeli każdemu elementowi p danego zbioru P punktów przestrzeni m-wymiarowej jest podporządkowany pewien punkt q przestrzeni k-wymiarowej, to mówimy, że mamy wyznaczoną funkcyę elementów zbioru P, i piszemy

$$q = f(p).$$

Jeżeli dla każdego ciągu zbieżnego p_n elementów zbioru P, którego granica należy również do P, równość

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0$$

pociąga za sobą zawsze równość

$$\lim_{n=\infty} f(p_n) = f(p_0),$$

to funkcyę $f(p)$ nazywamy ciągłą w zbiorze P.

Zbiór Q wszystkich punktów przestrzeni k-wymiarowej, podporządkowanych wszystkim punktom zbioru P, nazywamy obrazem albo odwzorowaniem tego zbioru w przestrzeni k-wymiarowej.

Jeżeli każdym dwom różnym punktom zbioru P są podporządkowane zawsze dwa różne punkty zbioru Q, to jasnem jest, że każdemu punktowi q zbioru Q odpowiada jeden i przytem jeden tylko punkt p zbioru P taki, iż

$$f(p) = q.$$

Oznaczając ten punkt p przez $\varphi(q)$, będziemy mieli w funkcyi $\varphi(q)$ funkcyę, określoną dla wszystkich elementów zbioru Q. Funkcyę tę nazywamy funkcyą odwrotną funkcyi f. Jasnem jest, że dla każdego elementu p zbioru P mamy wtedy równość

$$\varphi(f(p)) = p,$$

dla każdego zaś elementu q zbioru Q mamy równość

$$f(\varphi(q)) = q.$$

Jasnem jest, dalej, że funkcye $q = f(p)$ i $p = \varphi(q)$ ustalają odpowiedniość jednoznaczną między elementami zbiorów P i Q. Mówimy, że funkcya $f(p)$ jest jednoznacznie odwracalna.

Twierdzenie. Odwzorowanie ciągłe continuum, o ile nie jest jednym punktem, jest znowu continuum.

Dowód. Niech P oznacza dane continuum m-wymiarowe, Q—obraz zbioru P w przestrzeni k-wymiarowej, otrzymany zapomocą funkcyi ciągłej $q = f(p)$.

Udowodnimy przedewszystkiem, że zbiór Q jest ograniczony. Załóżmy, że zbiór Q nie jest ograniczony. Musiałby więc wtedy nie być ograniczony zbiór wartości jednej conajmniej ze spółrzędnych punktów zbioru Q, np. pierwszej spółrzędnej. Niech X oznacza ten zbiór. Skoro zbiór X nie jest ograniczony, to niema takiego przedziału (a, b), wewnątrz którego byłyby zawarte wszystkie punkty zbioru X, innemi słowy, jakikolwiek wzięlibyśmy przedział (a, b), zawsze znajdą się punkty zbioru x, nie leżące wewnątrz tego przedziału. Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną: znajdziemy więc w zbiorze X liczbę x_n, nie leżącą wewnątrz przedziału $(-n, n)$, zatem spełniającą nierówność:

$$|x_n| \geqslant n.$$

Niech q_n oznacza punkt zbioru Q, którego pierwszą spółrzędną jest właśnie liczba x_n. Dla każdego punktu q_n zbioru Q znajdziemy conajmniej jeden punkt p_n zbioru P taki, iż

$$f(p_n) = q_n.$$

Ze zbioru nieskończonego p_n można, w myśl twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, wyjąć ciąg zbieżny p_{r_n} o samych różnych wskaźnikach: niech p_0 oznacza granicę tego ciągu: będzie to punkt zbioru P, gdyż ten ostatni jest zamknięty. Wobec ciągłości funkcyi $f(p)$, ciąg $q_{r_n} = f(p_{r_n})$ musiałby zmierzać do $q_0 = f(p_0)$, mielibyśmy więc też

$$\lim x_{r_n} = x_0,$$

gdzie przez x_0 oznaczamy pierwszą spółrzędną punktu q_0.

Lecz w takim razie oznaczając przez (a, b) jakikolwiek dany przedział, wewnątrz którego leży x_0, mielibyśmy dla dostatecznie wielkich n stale

$$a < x_{r_n} < b,$$

gdy tymczasem jest stale

$$| x_{r_n} | > r_n.$$

Wskaźniki r_n są wszystkie różne, a więc ciąg r_n wzrasta nieograniczenie. Wzrastają więc nieograniczenie, w myśl ostatniej nierówności, i liczby $| x_{r_n} |$, co sprzeciwia się wnioskowi, że, dla dostatecznie wielkich n, liczby x_{r_n} leżą wszystkie wewnątrz pewnego przedziału (a, b).

Dowiedliśmy więc, że zbiór Q musi być ograniczony.

Udowodnimy obecnie, że zbiór Q jest zamknięty. Niech q oznacza jakiekolwiek miejsce skupienia zbioru Q. Istnieje więc ciąg q_n elementów zbioru Q, zmierzający do q. Każdemu punktowi q_n odpowiada przynajmniej jeden punkt p_n zbioru P taki, iż

$$f(p_n) = q_n.$$

Wyjmijmy ze zbioru nieskończonego p_n ciąg zbieżny p_{r_n}; niech p_0 oznacza jego granicę. Wobec zamkniętości zbioru P, do którego należą wszystkie p_n, będzie p_0 elementem tego zbioru. Wobec ciągłości funkcyi $f(p)$ musi być

$$\lim_{n=\infty} f(p_{r_n}) = f(p_0),$$

gdzie $f(p_0) = q_0$ jest punktem, odpowiadającym punktowi p_0 zbioru P, zatem elementem zbioru Q.

Ciąg $q_{r_n} = f(p_{r_n})$ jest oczywiście ciągiem, wyjętym z ciągu q_n, zmierzającego do q, jest więc też

$$\lim_{n=\infty} f(p_{r_n}) = q\ ,$$

a że żaden ciąg nie może posiadać dwóch różnych granic (art. 1), więc $q = q_0$, co dowodzi, że q jest elementem zbioru Q.

Dowiedliśmy, więc, że każde miejsce skupienia zbioru Q należy do ego zbioru, czyli że zbiór Q jest zamknięty.

Udowodnimy wreszcie, że zbiór Q jest spójny. Załóżmy, dla dowodu, że zbiór Q da się rozbić na dwa zbiory zamknięte Q_1 i Q_2, nie posiadające wspólnych elementów. Rozbijmy też zbiór P na dwa zbiory P_1 i P_2, zaliczając do zbioru P_1 (względnie P_2) wszystkie te punkty p zbioru P, których obrazy czyli punkty $q = f(p)$, należą do Q_1 (względnie Q_2). Jasnem jest, że zbiory P_1 i P_2 nie posiadają wspólnych elementów.

Niech p oznacza punkt skupienia zbioru P_1: można więc wyzna-

czyć ciąg p_n elementów zbioru P_1, zmierzający do p. Punkt p będzie oczywiście elementem zbioru P, gdyż ten ostatni jest zamknięty. Wobec ciągłości funkcyi f, ciąg $q_n = f(p_n)$ będzie zmierzał do $q = f(p)$. Lecz wszystkie wyrazy q_n należą oczywiście do zbioru Q_1 (skoro wszystkie p_n należą do P_1), a że zbiór Q_1 jest, jak zakładamy, zamknięty, więc punkt q musi też należeć do Q_1. Stąd wniosek, że punkt p należy do zbioru P_1. Ten ostatni jest więc zamknięty. Tak samo dowiedlibyśmy, że zbiór P_2 jest zamknięty.

Możnaby więc, gdyby zbiór Q nie był spójny, rozbić zbiór P na dwa zbiory zamknięte, nie posiadające wspólnych elementów, wbrew założeniu, że P przedstawia continuum.

Możemy więc całe nasze twierdzenie uważać za dowiedzione w zupełności.

Przeglądając nasz dowód, widzimy, że moglibyśmy wypowiedzieć jeszcze następujące twierdzenie:

Odwzorowanie ciągłe zbioru ograniczonego i zamkniętego jest zbiorem ograniczonym i zamkniętym.

6. **Lemmat.** Jeżeli ciąg ograniczony liczb rzeczywistych x_n nie zmierza do granicy x, to można z niego wyjąć ciąg, zmierzający do granicy różnej od x.

Dowód. Zakładamy, że ciąg ograniczony x_n nie zmierza do granicy x (czy wogóle ciąg ten jest zbieżny, tego nie wiemy).

Istnieje więc taki przedział (a, b), iż

$$a < x < b,$$

i że przytem dla nieskończenie wielu wskaźników n zachodzi przynajmniej jedna z nierówności

$$x_n \leqslant a, \text{ lub } b \leqslant x_n .$$

(Gdyby bowiem dla każdego przedziału, zawierającego wewnątrz x, każda z tych nierówności zachodziła tylko dla skończonej liczby wskaźników, to mielibyśmy oczywiście $\lim_{n=\infty} x_n = x$).

Załóżmy np. że nierówność

$$x_n \leqslant a$$

zachodzi dla nieskończenie wielu wyrazów naszego ciągu. Ze zbioru tych wyrazów, jako zbioru nieskończonego ograniczonego, możnaby wyjąć ciąg zbieżny x_{r_n}. Niech x_0 oznacza jego granicę. Mamy stale

$$x_{r_n} \leqslant a ;$$

powiadam, że również

$$x_0 \leqslant a.$$

Gdyby bowiem, było $x_0 > a$ to wobec $\lim\limits_{n=\infty} x_{r_n} = x_0$ musiałoby dla dostatecznie wielkich n być $x_{r_n} > a$, wbrew naszej nierówności.

Mamy więc $x_0 \leqslant a < x$, skąd $x_0 \neq x$.

Podobnież wyznaczylibyśmy ciąg zbieżny do granicy $\neq x$, w razie gdyby nierówność $b \leqslant x_n$ była spełniona dla nieskończenie wielu wskaźników n. Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Twierdzenie. Jeżeli funkcya $f(p)$, określona w zbiorze zamkniętym i ograniczonym P, jest ciągła i jednoznacznie odwracalna, to jej odwrócenie jest również funkcyą ciągłą.

Dowód. Oznaczmy przez Q obraz zbioru P, uzyskany zapomocą funkcyi $f(p)$; oznaczmy przez $\varphi(q)$ odwrócenie funkcyi $f(p)$: będzie to więc funkcya, określona dla zbioru Q. Niech q_n oznacza jakikolwiek dany ciąg punktów zbioru Q, którego granica q również należy do Q. Chcemy dowieść, że

$$\lim_{n=\infty} \varphi(q_n) = \varphi(q),$$

czyli, kładąc

$$\varphi(q_n) = p_n\,, \quad \varphi(q) = p\,,$$

że

$$\lim_{n=\infty} p_n = p$$

(punkty p_n i punkt p należą oczywiście do zbioru P).

Załóżmy więc, dla dowodu, że ciąg p_n nie zmierza do granicy p. Wypiszmy wyraźnie spółrzędne uważanych punktów:

$$p_n = (x_n', x_n'', \ldots, x_n^{(m)}),\ p = (x', x'', \ldots, x^{(m)}).$$

Gdyby zachodziła każda z równości

$$\lim_{n=\infty} x' = x',\ \lim_{n=\infty} x_n'' = x'', \ldots \lim_{n=\infty} x_n^{(m)} = x^{(m)},$$

to, w myśl definicyi granicy ciągu punktów (art. 2), mielibyśmy

$$\lim_{n=\infty} p_n = p;$$

jeżeli więc równość ta nie zachodzi, to musi też nie zachodzić conajmniej jedna z wypisanych wyżej m równości dla granic spółrzędnych, np. pierwsza.

Możemy więc zastosować nasz lemmat do ciągu liczb rzeczywistych x_n', który jest ograniczony, wobec ograniczoności zbioru P.

Istnieje więc ciąg zbieżny x'_{r_n}, wyjęty z ciągu x'_n, zmierzający do granicy

$$\lim_{n=\infty} x'_{r_n} = x_\omega' \neq x'.$$

Weźmy pod rozwagę ciąg punktów p_{r_n}: wszystkie wyrazy tego ciągu należą do zbioru P, gdyż ciąg ten jest oczywiście wyjęty z ciągu p_n. Z ciągu nieskończonego ograniczonego punktów p_{r_n} możemy, w myśl twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, wyjąć ciąg zbieżny

$$p_{s_n} = (x_{s_n}', x_{s_n}'', \ldots, x_{s_n}^{(m)});$$

niech

$$p_0 = (x_0', x_0''; \ldots, x_0^{(m)})$$

oznacza jego granicę.

Musi oczywiście być

$$\lim_{n=\infty} x_{s_n}' = x_0'.$$

Lecz ciąg x_{s_n}' jest oczywiście wyjęty z ciągu x_{r_n}': musi więc też być

$$\lim_{n=\infty} x_{s_n}' = x_\omega'.$$

Stąd wniosek, że $x_0' = x_\omega' \neq x'$ oraz, co zatem idzie, że

$$p_0 \neq p.$$

Z drugiej strony, wobec równości

$$\lim_{n=\infty} p_{s_n} = p_0,$$

oraz założenia o ciągłości funkcyi $f(p)$, musielibyśmy mieć:

$$\lim_{n=\infty} f(p_{s_n}) = f(p_0),$$

a że ciąg $f(p_{s_n})$ jest oczywiście wyjęty z ciągu $f(p_n) = q_n$, zmierzającego do q, więc musi też być:

$$\lim_{n=\infty} f(p_{s_n}) = q.$$

Zestawiając obie otrzymane równości, dostajemy

$$f(p_0) = q,$$

czyli $f(p_0) = f(p)$, co wobec $p_0 \neq p$, jest niemożliwe, skoro, jak zakładamy, funkcya $f(p)$ jest jednoznacznie odwracalna.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

7. Niech P oznacza dany zbiór punktów przestrzeni m-wymiarowej. Nazywać będziemy zbiorem dopełniającym dla zbioru P

zbiór P_1 tych wszystkich punktów przestrzeni m-wymiarowej, które nie należą do zbioru P.

Punkty zbioru P, które nie są miejscami skupienia zbioru P_1, nazywamy punktami wewnętrznemi zbioru P.

Punkty zbioru P_1, które nie są miejscami skupienia zbioru P, nazywamy punktami zewnętrznemi dla zbioru P.

Wreszcie te punkty przestrzeni m-wymiarowej, które nie są dla zbioru P ani wewnętrznemi, ani zewnętrznemi, nazywamy punktami ograniczenia zbioru P (points frontières). Punktami ograniczenia mogą być zarówno punkty należące, jak i punkty nie należące do zbioru P.

Powiadam, że jeżeli punkt

$$p_0 = (x_0', x_0'', \dots, x_0^{(m)})$$

jest punktem wewnętrznym zbioru P, to istnieje taki ciąg m przedziałów

$$(a', b'), (a'', b''), \dots, (a^{(m)}, b^{(m)}), \qquad (1)$$

iż

$$a' < x_0' < b', \; a'' < x_0'' < b'', \dots, a^{(m)} < x_0^{(m)} < b^{(m)} \qquad (2)$$

i że przytem każdy punkt

$$p = (x', x'', \dots, x^{(m)}),$$

którego spółrzędne spełniają nierówności

$$a' \leqslant x' \leqslant b', \; a'' \leqslant x'' \leqslant b'', \dots a^{(m)} \leqslant x^{(m)} \leqslant b^{(m)}, \qquad (3)$$

należy do zbioru P.

Załóżmy dla dowodu, że dla pewnego punktu wewnętrznego p_0 zbioru P taki ciąg przedziałów nie istnieje. Znaczy to, że jakikolwiek ciąg przedziałów (1), spełniający nierówności (2), wzięlibyśmy, zawsze znajdzie się przynajmniej jeden punkt p, którego spółrzędne spełniają nierówności (3), należący do P_1.

Obierzmy dwa ciągi, jeden rosnący u_n', drugi malejący v_n', zmierzające oba do x_0', dalej dwa ciągi, rosnący u_n'' i malejący v_n'', zmierzające do x_0'' i t. d., wreszcie dwa ciągi: rosnący $u_n^{(m)}$ i malejący $v_n^{(m)}$, zmierzające do $x_0^{(m)}$. Będzie oczywiście przy wszelkiem n:

$$u_n' < x_0' < v_n, \; u_n'' < x_0'' < v_n'', \dots u_n^{(m)} < x_0^{(m)} < v_n^{(m)}.$$

W myśl naszego założenia, można będzie przy danem n wyznaczyć taki punkt

$$p_n = (x_n', x_n'', \dots, x_n^{(m)}),$$

należący do P_1, którego spółrzędne spełniać będą nierówności:

$$u_n' \leqslant x_n' \leqslant v_n',\ u_n'' \leqslant x_n'' \leqslant v_n'', \ldots, u_n^{(m)} \leqslant x_n^{(m)} \leqslant v_n^{(m)}.$$

Niech (α', β') oznacza dowolny przedział taki, iż

$$\alpha' < x_0' < \beta'.$$

Wobec $\lim\limits_{n=\infty} u_n' = \lim\limits_{n=\infty} v_n' = u_0'$ będziemy mieli przy pewnem dostatecznie wielkiem ν:

$$\alpha' < u_\nu', v_\nu' < \beta',$$

a że dla $n > \nu$ oczywiście

$$u_\nu' < u_n',\ v_n' < v_\nu',$$

więc dla $n > \nu$ będzie stale

$$\alpha' < u_n' \leqslant x_n' \leqslant v_n' < \beta',\ \text{czyli}\ \alpha' < x_n' < \beta',$$

co dowodzi, że

$$\lim x_n' = x_0'.$$

Podobnież dowiedlibyśmy, że

$$\lim_{n=\infty} x_n'' = x_0'', \ldots, \lim_{n=\infty} x_n^{(m)} = x_0^{(m)}.$$

Mamy więc

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0.$$

Punkt p_0 byłby więc granicą ciągu p_n, punktów należących do zbioru P_1: nie byłby to więc, wbrew założeniu, punkt wewnętrzny zbioru P. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

8. **Twierdzenie.** Żaden zbiór punktów przestrzeni dwuwymiarowej, posiadający punkt wewnętrzny, nie możc być odwzorowany w sposób ciągły i jedno-jednoznaczny na zbiorze punktów przestrzeni jednowymiarowej.

Załóżmy dla dowodu, że pewien zbiór P punktów przestrzeni dwuwymiarowej, posiadający punkt wewnętrzny, posiada swój obraz ciągły i jedno-jednoznaczny Q w przestrzeni jednowymiarowej.

Niech $f(p)$ oznacza funkcyę punktów zbioru P, wyznaczającą uważane odwzorowanie: będzie to funkcya ciągła.

Zbiór P posiada, jak zakładamy, punkt wewnętrzny, niech

$$p_0 = (x_0, y_0)$$

będzie jednym z punktów wewnętrznych zbioru P. Można więc, w myśl twierdzenia z art. 7-go, wyznaczyć takie przedziały

$$(a, b)\ \text{oraz}\ (c, d),$$

iż będzie

$$a < x_0 < b,\ c < y_0 < d,$$

oraz iż każdy punkt

$$p = (x, y),$$

którego spółrzędne spełniają nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,$$

należeć będzie do zbioru P.

W szczególności więc do zbioru P należeć będą wszystkie punkty

$$p = (x, y_0),$$

gdzie x oznacza liczbę dowolną, spełniającą nierówności:

$$a \leqslant x \leqslant x_0$$

— nazwijmy zbiór ich zbiorem P_1. Dalej, do zbioru P należeć będą wszystkie punkty

$$p = (x, y_0),$$

gdzie x oznacza liczbę dowolną, spełniającą nierówności:

$$x_0 \leqslant x < b;$$

oznaczymy zbiór ich przez P_2.

Do zbioru P należeć będą też wszystkie punkty

$$p = (x_0, y),$$

gdzie y oznacza liczbę dowolną, spełniającą nierówność

$$y_0 \leqslant y \leqslant d;$$

oznaczmy zbiór ich przez P_3.

Jasnem jest, że zbiory P_1, P_2 i P_3 posiadają tylko jeden punkt wspólny, mianowicie punkt p_0: poza tem wszystkie punkty uważanych zbiorów są różne.

Jasnem jest dalej, że każdy ze zbiorów P_1, P_2 i P_3 przedstawia continuum (gdyż każdy z nich może być uważany jako ciągłe odwzorowanie pewnego przedziału, z włączeniem granic, czyli pewnego continuum liniowego. Zob. art. 4 i art. 5).

Funkcya $f(p)$, wyznaczająca odwzorowanie zbioru P na zbiorze Q, wyznacza zatem odwzorowanie każdego ze zbiorów P_1, P_2 i P_3 na odpowiedniej części zbioru Q. Jasnem jest, że funkcya $f(p)$, będąc ciągłą w całym zbiorze P, będzie też ciągłą w każdym ze zbiorów P_1, P_2 i P_3. Obrazy Q_1, Q_2 i Q_3 tych zbiorów są więc obrazami ciągłemi, a że zbiory P_1, P_2 i P_3 są continua, więc zbiory Q_1, Q_2, Q_3 muszą też być continua (w myśl twierdzenia z art. 5-go).

Lecz continuum jednowymiarowe jest identyczne z pewnym przedziałem z włączeniem granic (art. 4). Jest więc zbiór Q_1 pewnym przedziałem (α_1, β_1), zbiór Q_2—pewnym przedziałem (α_2, β_2), zbiór Q_3 — pewnym przedziałem (α_3, β_3)—każdy z włączeniem granic.

Ponieważ zakładane odwzorowanie zbioru P na zbiorze Q jest jedno-jednoznaczne, a zbiory P_1, P_2 i P_3 posiadają tylko jeden punkt wspólny, więc i zbiory Q_1, Q_2 i Q_3 posiadają tylko jeden punkt wspólny. Niech więc ξ_0 oznacza wspólny punkt przedziałów (α_1, β_1), (α_2, β_2) i (α_3, β_3).

Gdyby $\alpha_1 = \alpha_2$, to oczywiście nie mogłoby być $\beta_1 = \beta_2$, gdyż wtedy przedziały (α_1, β_1) i (α_2, β_2) posiadałyby więcej niż jeden punkt wspólny; musiałoby więc w razie $\alpha_1 = \alpha_2$, być $\beta_1 \neq \beta_2$, np. $\beta_1 < \beta_2$. Lecz wtedy jasnem jest, że wszystkie punkty przedziału (α_1, β_1) byłyby zarazem punktami przedziału (α_2, β_2), co przeczy założeniu, że przedziały te mają tylko jeden punkt wspólny.

W ten sposób udowodnimy, że liczby α_1, α_2 i α_3 są wszystkie różne. Założmy np., że

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 .$$

Gdyby było $\beta_1 < \alpha_2$, to oczywiście przedziały (α_1, β_1) i (α_2, β_2) nie miałyby żadnego punktu wspólnego, gdyby zaś było $\alpha_2 < \beta_1$, to, w razie $\beta_1 \leqslant \beta_2$ cały przedział (α_2, β_1), zaś w razie $\beta_1 > \beta_2$, cały przedział (α_2, β_2) byłby wspólną częścią przedziałów (α_1, β_1) i (α_2, β_2). Musi więc być $\beta_1 = \alpha_2$.

Lecz zupełnie tak samo udowodnimy, że $\beta_1 = \alpha_3$. Równości zaś $\beta_1 = \beta_2$ i $\alpha_1 = \alpha_3$, dają $\alpha_2 = \alpha_3$, wbrew nierówności $\alpha_2 < \alpha_3$.

Założenie, że twierdzenie, wypowiedziane na początku artykułu nie jest prawdziwe, doprowadza zatem do sprzeczności. Twierdzenie to jest więc prawdziwe.

9. Udowodnione twierdzenie ma nader doniosłe znaczenie: ono to głównie było ostatecznym celem rozważań całego niniejszego rozdziału.

W rozdz. IV-ym (art. 3) dowiedliśmy twierdzenia Cantora, że przestrzeń dwuwymiarowa może być odwzorowana jedno-jednoznacznie na przestrzeni jednowymiarowej. Dowiedzione obecnie twierdzenie stanowi niejako uzupełnienie tego twierdzenia Cantora. Możemy więc (przynajmniej, co się tyczy przestrzeni jedno- i dwuwymiarowej) powiedzieć, że liczba wymiarów nie jest niezmiennikiem przekształcenia jedno-jednoznacznego, ale jest niezmiennikiem przekształcenia jedno-jednoznacznego i zarazem ciągłego. Przytem, co się tyczy ciąg-

łości, to wiemy w myśl tw. z art. 6-go, że jeżeli przy przekształceniu jedno-jednoznacznem zachodzi ona z jednej strony, to zachodzić musi też i z drugiej.

Badaniem tych własności mnogości punktowych, które nie ulegają zmianie przy odwzorowaniach jedno-jednoznacznych i ciągłych, zajmuje się specyalna nauka, zwana Topologią albo Analysis Situs. Przykładem twierdzenia, należącego do tej nauki, jest np. twierdzenie, że obrazem jedno-jednoznacznym i ciągłym continuum jest znowu continuum. (Jest to wniosek z tw. z art. 5-go, według którego nawet przy ciągłem i jednoznacznem, ale niekoniecznie jedno-jednoznacznem odwzorowaniu continuum przechodzi na continuum).

Z punktu widzenia Analysis Situs są np. równoważne wszystkie mnogości punktowe, które są jedno-jednoznacznemi i ciągłemi obrazami przedziału (z włączeniem granic). Takie zbiory punktów noszą nazwę krzywych Jordana[1]).

Niech C oznacza daną krzywą Jordana w przestrzeni dwuwymiarowej. Zbiór punktów C jest więc ciągłem i jedno-jednoznacznem odwzorowaniem pewnego przedziału (t_1, t_2), z włączeniem granic. Niech

$$p = (x, y)$$

oznacza punkt zbioru C. Punkt ten odpowiada pewnej liczbie t, należącej do przedziału (t_1, t_2): możemy więc spółrzędne jego uważać jako funkcye zmiennej t:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Funkcye te muszą być ciągłe, skoro odwzorowanie jest ciągłe. Nadto, jeżeli t i τ są liczby, należące do przedziału (t_1, t_2), to równości

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) \quad \text{oraz} \quad \psi(t) = \psi(\tau)$$

pociągają za sobą równość

$$t = \tau,$$

gdyż odwzorowanie musi być jedno-jednoznaczne.

Ale, jak łatwo widzieć, i naodwrót: jeżeli $\varphi(t)$ i $\psi(t$ są dwie dowolne funkcye, byleby ciągłe w przedziale (t_1, t_2) (z włączeniem granic) i takie, iż warunki

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2,\ \varphi(t) = \varphi(\tau),\ \psi(t) = \psi(\tau)$$

pociągają za sobą zawsze równość

$$t = \tau,$$

---

[1]) Zob.: C. Jordan. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Paris 1909. T. I, p. 90.

to zbiór wszystkich punktów przestrzeni dwuwymiarowej

$$p = (x, y),$$

których spółrzędne otrzymamy ze wzorów

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t),$$

gdzie t oznacza liczbę dowolną, spełniającą nierówności

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

jest krzywą Jordana.

Krzywe Jordana są to więc zbiory punktów, które w zwykłej Geometryi obejmuje się nazwą krzywych ciągłych bez punktów wielokrotnych.

10. Z twierdzenia, udowodnionego w art. 8-ym, wynika, że nie możemy kwadratu w sposób jedno-jednoznaczny i ciągły odwzorować na odcinku. Możemy to jednak, w myśl twierdzenia Cantora, zrobić w sposób jedno-jednoznaczny, ale nieciągły. Zjawia się teraz całkiem naturalnie pytanie, czy jednak kwadrat nie może być jednoznacznym i ciągłym obrazem odcinka, jeżeli nie będziemy wymagali, aby obraz ten był jedno-jednoznaczny. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca: przykład takiego odwzorowania dał Peano w pracy „Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane“ [1]).

Niech t oznacza liczbę rzeczywistą przedziału (0,1). Jeżeli $t > 0$, to rozwińmy ją na ułamek trójkowy, istotnie nieskończony

$$t = (0, a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots)_3 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots;$$

jeżeli zaś $t = 0$, to wypiszmy rozwinięcie 0,000 ...

Połóżmy przy wszelkiem a:

$$k(a) = 2 - a,$$

oraz, przez skrócenie:

$$k(k(a)) = k^2(a), \; k(k^2(a)) = k^3(a) \text{ i t. d.}$$

przyczem $k^0(a) = a$, $k^1(a) = k(a)$.

Połóżmy dalej, przy wszelkiem naturalnem n:

$$b_n = k^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}), \; c_n = k^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}(a_{2n-2}),$$

oraz

$$\varphi(t) = (0, b_1 \, b_2 \, b_3 \ldots)_3, \; \psi(t) = (0, c_1 \, c_2 \, c_3 \ldots)_3.$$

[1]) Mathematische Annalen Bd. 36, p. 157.

Jasnem jest, że funkcye $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ będą w zupełności określone dla $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Możnaby dowieść, że są to funkcye ciągłe w przedziale (0, 1), że więc krzywa, określona przez równania

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t),$$

jest jednoznacznem i ciągłem odwzorowaniem odcinka (0, 1).

Z drugiej strony można dowieść, że dla każdego układu liczb rzeczywistych (x, y), gdzie

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

istnieje przynajmniej jedna wartość na t w przedziale (0, 1), taka iż

$$\varphi(t) = x, \; \psi(t) = y.$$

Dla otrzymania jej wystarcza rozwinąć liczby x i y, podobnie jak wyżej rozwijaliśmy t, na ułamki trójkowe

$$x = (0, b_1 \, b_2 \, b_3 \ldots)_3, \; y = (0, c_1 \, c_2 \, c_3 \ldots)_3,$$

i położyć przy wszelkiem naturalnem n:

$$a_{2n-1} = k^{c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}}(b_n), \qquad (a_1 = b_1),$$
$$a_{2n} = k^{b_1+b_2+\cdots+b_n}(c_n);$$

liczba $t = (0, a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots)_3$ będzie żądana.

W bliższe szczegóły, dotyczące powyższego dowodu, nie wchodzimy tutaj, gdyż odnośne rozważania należą raczej do Analizy niż do Teoryi mnogości.

Prostą ilustracyę geometryczną krzywej Peano podaje Schoenflies[1]) oraz Moore[2]).

Inną krzywą ciągłą, wypełniającą kwadrat, podał (w formie geometrycznej) Hilbert[3]), inną jeszcze (w postaci analitycznej) daje Lebesgue[4]).

Niedawno zbudowałem krzywą ciągłą, wypełniającą kwadrat, prostszą od wszystkich wspomnianych tak pod względem analitycznym, jak i pod względem geometrycznym[5]).

Nazywamy obrazem geometrycznym funkcyi $f(x)$, określonej w przedziale (a, b), zbiór P wszystkich punktów

---

[1]) Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (1900), p. 122.

[2]) Transactions of the American Math, Soc. Vol. I (1900) p. 72–90.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. 38, p. 459. Prace mat.-fiz.. T. 5, str. 13.

[4]) Leçons sur l'intégration. Paris 1905, p. 44.

[5]) Biuletyn Akademii Krakowskiej 1912, p. 462—478.

$$p = (x, f(x)),$$

dla $a \leqslant x \leqslant b$.

Okazuje się, że można zbudować taką funkcyę $f(x)$ (nieciągłą, ale jednoznaczną), której obraz geometryczny P wszędziegęsto pokrywa pewien kwadrat K. (To znaczy, że każdy punkt kwadratu K jest miejscem skupienia zbioru P). Przykład takiej funkcyi podał również Lebesgue [1]). Określa on funkcyę $f(x)$ w przedziale (0, 1) w sposób następujący. Rozwija liczbę x na ułamek dziesiętny

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots.$$

i kładzie $f(x) = 0$, jeżeli ciąg cyfr rzędu nieparzystego

$$a_1, a_3, a_5, \ldots$$

nie jest okresowy. Jeżeli zaś ciąg ten jest okresowy, i jeżeli pierwszy okres zaczyna się od cyfry a_{2n-1}, to kładzie

$$f(x) = \frac{a_{2n}}{10} + \frac{a_{2n+2}}{10^2} + \frac{a_{2n+4}}{10^3} + \frac{a_{2n+6}}{10^4} + \ldots$$

O funkcyi tej można dowieść, że wewnątrz każdego przedziału (α, β) (gdzie $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$) przybiera każdą wartość nieujemną, nie większą od jedności.

---

[1]) tamże, p. 90.

ROZDZIAŁ VII.

Teorya mnogości punktowych liniowych.

1. W rozdziale niniejszym zajmiemy się bardziej szczegółowem badaniem mnogości punktowych jednowymiarowych, czyli, innemi słowy, mnogości wszystkich liczb rzeczywistych. Liczby rzeczywiste są podstawą Analizy, więc zasługują też i w Teoryi mnogości na szersze uwzględnienie

Niech X oznacza dany zbiór liczb rzeczywistych. Liczbę x nazywać będziemy prawostronnem miejscem skupienia zbioru X, jeżeli istnieje ciąg x_n elementów zbioru X taki iż $x_n > x$, oraz $\lim_{n=\infty} x_n = x$.

Powiadam, że zbiór wszystkich tych elementów zbioru X, które nie są jego prawostronnemi miejscami skupienia, jest conajwyżej przeliczalny.

Niech x oznacza element zbioru X, który nie jest jego prawostronnem miejscem skupienia. Musi wówczas istnieć taka liczba wymierna $w>x$, iż wewnątrz przedziału (x, w) niema żadnego elementu zbioru X. W samej rzeczy, założmy, że przeciwnie, przy wszelkiem wymiernem $w > x$ wewnątrz przedziału (x, w) można wyznaczyć element zbioru X.

Obierzmy jakikolwiek ciąg u_n liczb wymiernych malejących, zmierzający do x. Wewnątrz przedziału (x, u_n) możnaby więc zawsze wyznaczyć element x_n zbioru X, przyczem byłoby oczywiście $x_n > x$, oraz $\lim_{n=\infty} x_n = x$, wbrew założeniu, że x nie jest prawostronnem miejscem skupienia zbioru X.

Dowiedliśmy więc, że istnieje taka liczba wymierna $w > x$, iż wewnątrz przedziału (x, w) niema żadnego elementu zbioru X.

Ustawmy w jeden ciąg nieskończony w_n wszystkie liczby wymierne.

Niech w_p oznacza pierwszy wyraz tego ciągu większy od x i taki, iż wewnątrz przedziału (x, w_p) niema żadnego elementu zbioru X (taki wyraz w_p w ciągu w_n znajdzie się, w myśl tego, co udowodniliśmy przed chwilą).

Każdemu elementowi x zbioru X, który nie jest jego prawostronnem miejscem skupienia, możemy więc podporządkować oznaczoną w zupełności liczbę wymierną w_p, taką iż wewnątrz przedziału (x, w_p) niema żadnego elementu zbioru X.

Powiadam, że różnym elementom zbioru X, które nie są jego prawostronnemi miejscami skupienia, będą w ten sposób podporządkowane różne liczby wymierne.

W samej rzeczy, załóżmy, że elementom x i $x' > x$ została, wedle powyższej umowy, podporządkowana ta sama liczba wymierna w. Mielibyśmy $x < x' < w$, a więc wewnątrz przedziału (x, w) leżałby element x' zbioru X, wbrew naszej umowie.

Istnieje więc odpowiedniość doskonała między zbiorem X_1 wszystkich tych elementów zbioru X, które nie są jego prawostronnemi miejscami skupienia, a pewnym zbiorem liczb wymiernych. Wynika stąd, że zbiór X_1 jest skończony albo przeliczalny. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Zupełnie tak samo dowiedlibyśmy, że zbiór tych wszystkich elementów zbioru X, które nie są jego lewostronnemi miejscami skupienia, jest skończony albo przeliczalny (rozumiemy przez lewostronne miejsce skupienia danego zbioru każdą liczbę x, która jest granicą ciągu elementów uważanego zbioru, mniejszych od x).

Każdą liczbę g, która jest jednocześnie lewostronnem i prawostronnem miejscem skupienia zbioru X, nazywać będziemy jego **obustronnem** miejscem skupienia. Z dowiedzionych twierdzeń wynika natychmiast, że:

Każdy zbiór liczb rzeczywistych zawiera conajwyżej przeliczalną mnogość elementów, które nie są jego obustronnemi miejscami skupienia [1]).

---

[1]) Porówn. moją pracę: „Przyczynek do Teoryi mnogości". Księga pamiątkowa ku uczczeniu 250-ej rocznicy założenia Uniwersytetu Lwowskiego przez Króla Jana Kazimierza. (Kraków 1911).

Stąd wypływa wniosek:

Każdy zbiór nieprzeliczalny liczb rzeczywistych zawiera nieprzeliczalną mnogość punktów, które są jego obustronnemi miejscami skupienia.

Punkt danego zbioru X, który nie jest jego miejscem skupienia, nazywamy odosobnionym.

Jako bezpośredni wniosek z dowiedzionego twierdzenia mamy:

Każdy zbiór zawiera conajwyżej przeliczalną mnogość punktów odosobnionych.

Zbiór, którego wszystkie punkty są odosobnione, nazywamy odosobnionym.

Mamy więc też twierdzenie:

Każdy zbiór odosobniony jest skończony albo przeliczalny.

Przykładem przeliczalnego zbioru odosobnionego jest np. zbiór wszystkich odwrotności liczb naturalnych.

2. Twierdzenie. Jeżeli dla danego zbioru liczb rzeczywistych X istnieje taki zbiór przedziałów Δ, że każdy element zbioru X jest wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ, to istnieje skończona albo przeliczalna część Δ_1 tego zbioru, taka, że każdy z elementów zbioru X znajduje się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałow zbioru Δ_1.

Dowód. Weźmy pod rozwagę zbiór wszystkich przedziałów o końcach wymiernych. Zbiór ten jest oczywiście przeliczalny, jako nieskończona część przeliczalnego zbioru wszystkich układów dwóch liczb wymiernych. Możemy więc wszystkie przedziały o końcach wymiernych ustawić w jeden ciąg nieskończony d_n. Z ciągu tego wyjmijmy wszystkie te przedziały, z których każdy d ma tę własność, iż mieści się całkowicie wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ. Otrzymamy w ten sposób pewien (jak łatwo widzieć, nieskończony) ciąg przedziałów d_{r_n} o końcach wymiernych. Każdy z przedziałów d_{r_n} mieści się całkowicie wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ; podporządkujemy więc każdemu przedziałowi d_{r_n} jeden z tych przedziałów zbioru Δ, wewnątrz których d_{r_n} całkowicie się mieści.

Oznaczmy przez Δ_1 zbiór wszystkich tych przedziałów zbioru Δ, które zostały podporządkowane przedziałom ciągu d_{r_n}. Zbiór Δ_1 będzie oczywiście conajwyżej przeliczalny. (Może być nawet skończony, gdyż różnym przedziałom d_{r_n} mógł być podporządkowany ten sam przedział zbioru Δ). Powiadam, że zbiór Δ_1 jest żądany.

W samej rzeczy, niech x oznacza dany element zbioru X. Istnieje, w myśl założenia, taki przedział $\delta = (a, b)$ w zbiorze Δ, iż

$$a < x < b.$$

Między liczbami a i x możemy oczywiście wyznaczyć liczbę wymierną u, zaś między liczbami x i b—liczbę wymierną v. Liczba x będzie oczywiście leżała wewnątrz przedziału $d = (u, v)$ o końcach wymiernych, zaś przedział d będzie leżał całkowicie wewnątrz przedziału δ. Przedział d będzie więc jednym z przedziałów ciągu d_{r_n}; niech $\delta_1 = (a_1, b_1)$ oznacza przedział zbioru Δ_1, który mu został podporządkowany Będzie zatem

$$a_1 < u < x < v < b_1,$$

czyli punkt x leżeć będzie wewnątrz przedziału δ_1.

Każdy punkt zbioru X leży więc wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_1.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Zajmiemy się obecnie zastosowaniami dowiedzionego twierdzenia.

Nazywamy według Lindelöfa miejscem kondensacyi danego zbioru X liczbę g taką, iż wewnątrz każdego przedziału (a, b), gdzie $a < g < b$, znajduje się nieprzeliczalna mnogość elementów zbioru X.

Powiadam, że mnogość wszystkich tych elementów danego zbioru, które nie są jego miejscami kondensacyi, jest conajwyżej przeliczalna.

Z definicyi miejsca kondensacyi wynika natychmiast, że jeżeli dana liczba y nie jest miejscem kondensacyi zbioru X, to istnieje taki przedział (a, b), wewnątrz którego leży y i który zawiera wewnątrz conajwyżej przeliczalną mnogość elementów zbioru X.

Oznaczmy przez R zbiór wszystkich tych elementów zbioru X, które nie są jego miejscami kondensacyi. Dla każdego elementu r zbioru R istnieje taki przedział $\delta = (a, b)$, gdzie $a < r < b$, iż wewnątrz δ zawarta jest conajwyżej przeliczalna mnogość elementów zbioru X. Oznaczmy przez Δ zbiór wszystkich przedziałów δ, podporządkowanych w ten sposób wszystkim elementom zbioru R. W myśl dowiedzionego twierdzenia, istnieje taka część Δ_1 zbioru Δ, conajwyżej przeliczalna, iż każdy element zbioru R jest zawarty wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_1. Ale każdy przedział zbioru Δ_1 zawiera conajwyżej przeliczalną mnogość elementów zbioru X, a więc, tembardziej, conajwyżej przeliczalną mnogość elementów zbioru R (z których

każdy należy do X), a że sam zbiór Δ_1 jest conajwyżej przeliczalny, więc stąd wynika natychmiast, że i zbiór R musi być conajwyżej przeliczalny. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia. Jako natychmiastowy wniosek, mamy:

Każdy zbiór nieprzeliczalny zawiera nieprzeliczalną mnogość elementów, które są jego miejscami kondensacyi.

Niech X oznacza dany nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez K zbiór tych wszystkich elementów zbioru X, które są jego miejscami kondensacyi. Powiadam, że zbiór K jest w sobie gęsty, t. j. że każdy element zbioru K jest zarazem miejscem skupienia tegoż zbioru.

Oznaczmy przez R zbiór tych wszystkich elementów zbioru X (o ile takie istnieją), które nie są jego miejscami kondensacyi (będzie więc $X = R + K$): zbiór R jest więc conajwyżej przeliczalny. Niech k oznacza jakikolwiek element zbioru K. Ponieważ k jest miejscem kondensacyi zbioru X, więc wewnątrz każdego przedziału (a, b) takiego, iż $a < k < b$, leży nieprzeliczalna mnogość elementów zbioru X. Z nich do zbioru R może należeć conajwyżej mnogość przeliczalna (gdyż sam zbiór R jest conajwyżej przeliczalny): mamy więc wewnątrz każdego przedziału (a, b) takiego, iż $a < k < b$, nieprzeliczalną mnogość elementów zbioru K (gdyż te elementy zbioru X, które nie należą do R, muszą należeć do K).

Dowiedliśmy więc nietylko, że każdy element zbioru K jest miejscem skupienia tego zbioru, ale nawet, że jest miejscem kondensacyi zbioru K.

Mamy więc twierdzenie:

Każdy zbiór nieprzeliczalny posiada część w sobie gęstą.

Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy:

Twierdzenie. Każdy zbiór, który nie posiada części w sobie gęstej, jest conajwyżej przeliczalny.

Zauważymy, że twierdzenie to nie daje się odwrócić: zbiór przeliczalny może posiadać część w sobie gęstą: przykładem—zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Załóżmy teraz, że zbiór X jest zamknięty. Powiadam, że zbiór K (o ile nie jest pusty) też będzie zamknięty. W samej rzeczy, niech k_n oznacza ciąg elementów zbioru K, zmierzający do granicy g. Ponieważ elementy zbioru K są zarazem elementami zbioru X, a ten ostatni jest zamknięty, więc g musi być elementem zbioru X. Weźmy dowolny

przedział (a, b) taki, iż $a < g < b$. Ponieważ ciąg k_n zmierza do g, więc przy pewnem $n = p$ będzie $a < k_p < b$. Lecz k_p jest miejscem kondensacyi zbioru X: musi więc wewnątrz przedziału (a, b) leżeć nieprzeliczalna mnogość elementów zbioru X. Ponieważ (a, b) jest dowolnym przedziałem, byleby takim, iż $a < g < b$, więc z tego, czegośmy dowiedli przed chwilą, wynika natychmiast, że g jest miejscem kondensacyi zbioru X. Jest więc g jednocześnie elementem zbioru X i jego miejscem kondensacyi, skąd wniosek, że g jest elementem zbioru K. Ten ostatni zawiera zatem wszystkie swoje miejsca skupienia, czyli jest zamknięty.

Zbiór, który jest jednocześnie zamknięty i w sobie gęsty, nazywamy doskonałym: udowodniliśmy więc, że jeżeli zbiór X jest zamknięty, to zbiór K (o ile nie jest pusty), jest doskonały.

Wzór $X = R + K$ możemy jeszcze w tym przypadku wyrazić w formie następującego twierdzenia:

Każdy zbiór zamkięty daje się przedstawić jako suma dwóch zbiorów, z których pierwszy jest pusty, skończony albo przeliczalny, a drugi pusty albo doskonały.

W jednym z późniejszych artykułów udowodnimy, że takie przedstawienie jest możliwe tylko w jeden sposób.

3. Niech X oznacza dany zbiór zamknięty, d_n—ciąg nieskończony wszystkich przedziałów o końcach wymiernych.

Wyjmijmy z ciągu d_n wszystkie te i tylko te przedziały, wewnątrz których niema żadnego elementu zbioru X. Otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg przedziałów o końcach wymiernych d_{r_n}.

Każdy element zbioru X ma więc tę własność, że nie jest zawarty wewnątrz żadnego z przedziałów d_{r_n}. Powiadam, że i naodwrót: każda liczba, która nie jest zawarta wewnątrz żadnego z przedziałów d_{r_n}, jest elementem zbioru X. Założmy bowiem, że y nie jest elementem zbioru X: wobec zamkniętości tego ostatniego y nie może też być miejscem skupienia zbioru X. Istnieje więc taki przedział (a, b), gdzie $a < y < b$, wewnątrz którego niema żadnego elementu zbioru X; oznaczając przez u liczbę wymierną, zawartą między a i y, zaś przez v liczbę wymierną, zawartą między y i b, otrzymamy przedział $d = (u, v)$, wewnątrz którego niema żadnego elementu zbioru X. Przedział o końcach wymiernych d musi więc być jednym z wyrazów ciągu d_{r_n}, a że y mieści się wewnątrz d, więc y jest wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów d_{r_n}.

A więc: każdy zbiór zamknięty jest w zupełności wyznaczony przez pewien ciąg przedziałów o końcach wymiernych.

(Ciąg d_{r_n} jest, jak łatwo widzieć, wogóle nieskończony i tylko w tym jedynym przypadku, kiedy zbiór X jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, ciąg d_{r_n} będzie pusty. Uwzględniając zatem i ciąg pusty, będziemy mogli powyższe twierdzenie stosować do każdego bez wyjątku zbioru zamkniętego).

Połóżmy $d_{r_n} = (u_n, v_n)$ i wypiszmy ciąg

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$$

Każdemu więc zbiorowi zamkniętemu (z wyjątkiem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych) odpowiada zatem pewien oznaczony w zupełności ciąg liczb wymiernych, przytem różnym zbiorom zamkniętym odpowiadają oczywiście różne takie ciągi.

Ponieważ zbiór wszystkich ciągów o wyrazach wymiernych jest mocy continuum (Rozdz. IV-ty), więc stąd wnioskujemy z łatwością, że mnogość wszystkich zbiorów zamkniętych jest mocy $\leqslant \mathfrak{c}$. Lecz z drugiej strony łatwo widzieć, że mnogość ta zawiera część mocy $\mathfrak{c}$: częścią tą jest np. mnogość wszystkich przedziałów $(x, x+1)$, z włączeniem granic. (Każdy taki przedział przedstawia oczywiście przy każdem rzeczywistem x zbiór zamknięty, a nawet doskonały).

Mamy zatem twierdzenie:

Mnogość wszystkich zbiorów zamkniętych jest mocy continuum.

Jak wiemy, mnogość wszystkich zbiorów liczb rzeczywistych jest mocy $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ (Rozdz. V, art. 2). Widzimy zatem, jak wielkie ograniczenie wprowadzamy, żądając, aby zbiór był zamknięty.

Z twierdzenia powyższego wynika też natychmiast, że i mnogość wszystkich zbiorów doskonałych jest mocy continuum.

4. Niech X oznacza dany zbiór zamknięty, zaś y — liczbę, która nie jest elementem zbioru X. Powiadam, że jeżeli istnieją w zbiorze X liczby $< y$, to wśród nich jest jedna największa.

W samej rzeczy, oznaczmy przez X_1 zbiór tych wszystkich elementów zbioru X, które są $< y$ i utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B wszystkie liczby rzeczywiste, większe od każdego z elementów zbioru X_1: do klasy B będzie więc też należała liczba y. Załóżmy, że w klasie B istnieje element najmniejszy b. Zbudujmy ciąg rosnący liczb wymiernych u_n, zmierzający do b. Będzie oczywiście stale $u_n < b$: każdy wyraz u_n będzie więc należał do klasy A. Można więc będzie przy wszelkiem n, wobec definicyi naszego przekroju, znaleść taki element x_n zbioru X_1, iż będzie $x_n \geqslant u_n$. Z drugiej strony musi być stale

$x_n < b$, gdyż b należy do klasy B. Nierówności $u_n \leqslant x_n < b$, wobec równości $\lim\limits_{n \infty} u_n = b$, dowodzą iż ciąg x_n zmierza do b. Liczba b byłaby więc miejscem skupienia zbioru X, a więc, wobec jego zamkniętości, elementem zbioru X. Lecz liczba b jest pierwszym elementem klasy B, do której należy y: jest więc $b \leqslant y$, a nawet $b < y$, gdyż y nie jest elementem zbioru X. Doszliśmy więc do wniosku, że b jest elementem zbioru X_1, wbrew założeniu, że b jest pierwszym elementem klasy B. W klasie tej niema zatem elementu pierwszego, skąd wniosek (wobec ciągłości zbioru liczb rzeczywistych), że w klasie A istnieje element ostatni a. W myśl definicyi klasy A, musi więc istnieć w zbiorze X_1 element x_1 taki, iż $a \leqslant x_1$. Nie może jednak być $a < x_1$, gdyż wtedy x_1 należałoby do klasy B, co niemożliwe. Jest więc $a = x_1$, czyli a jest największym elementem zbioru X_1. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Zupełnie tak samo dowiedlibyśmy, że jeżeli w zbiorze zamkniętym istnieją liczby, większe od danej liczby y, do zbioru nie należącej, to wśród nich istnieje jedna najmniejsza.

Stąd wniosek, że jeżeli y oznacza liczbę, nie należącą do danego zbioru zamkniętego X, to albo y jest liczbą mniejszą od każdego z elementów zbioru X, albo też y jest liczbą większą od każdego z elementów zbioru X, albo wreszcie istnieje taki przedział (a, b), wewnątrz którego leży y, ale wewnątrz którego niema żadnego elementu zbioru X, i którego końce a i b należą do zbioru X.

Niech teraz X oznacza dany zbiór doskonały. Weźmy pod rozwagę zbiór Δ wszystkich przedziałów (a, b), z których każdy posiada tę własność, że nie zawiera wewnątrz żadnego elementu zbioru X i że jego końce a i b należą do X.

Powiadam, że przedziały zbioru Δ na siebie nie zachodzą. W samej rzeczy, niech (a, b) i (c, d) będą dwa przedziały zbioru Δ. Nie może być $a = c$, gdyż wtedy, wobec różności wziętych przedziałów musiałoby być $b \neq d$, np. $b < d$ — wbrew założeniu, że wewnątrz (a, b) niema żadnego elementu zbioru X. Gdyby zaś było np. $a < c$, to nie mogłoby być $c < b$, gdyż wtedy element c zbioru X znalazłby się wewnątrz przedziału (a, b).

Byłoby więc $c \geqslant b$, co dowodzi, że przedziały (a,b) i (c, d) nie zachodzą na siebie. Zbiór Δ jest więc, w myśl twierdzenia z art. 1-go Rozdz. II-go — conajwyżej przeliczalny. (Może on być też skończony, albo nawet pusty. Pusty będzie dla zbioru doskonałego wszystkich liczb rzeczywistych; skończony będzie np. dla zbioru doskonałego wszystkich liczb rzeczywistych, bezwzględnie nie mniejszych od jedności).

Powiadam dalej, że przedziały zbioru Δ nie stykają się.

W samej rzeczy, gdyby przedziały (a, b) i (c, d) stykały się ze sobą, to mielibyśmy $b = c$ i, jak łatwo widzieć, punkt c byłby odosobnionym punktem zbioru X (leżąc wewnątrz przedziału (a, d)), wbrew założeniu, że zbiór X jest doskonały.

Udowodnimy obecnie, że każdy zbiór doskonały jest mocy continuum. Jest to jasnem, jeżeli zbiór X posiada punkty wewnętrzne: w tym razie bowiem istnieje taki przedział (α, β), którego wszystkie wewnętrzne punkty należą do X, a więc zbiór X posiada wtedy część mocy continuum, a, że z drugiej strony, sam jest częścią zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, więc stąd wynika twierdzenie, o które nam chodzi.

Wystarczy więc, dla dalszego dowodu, założyć, że zbiór doskonały X nie posiada żadnego punktu wewnętrznego. Nie przesądzając narazie kwestyi, czy wogóle zbiory doskonałe, nie mające punktów wewnetrznych, istnieją, udowodnimy, że jeżeli istnieją, to też mają moc continuum. Zakładając, że X jest zbiorem doskonałym bez punktów wewnętrznych, utwórzmy więc zbiór Δ.

Czytelnik udowodni z największą łatwością, że, wobec naszego założenia co do zbioru X, zbiór Δ nie może być pusty, ani też nie może składać się z jednego tylko przedziału.

Zbiór Δ zawiera więc conajmniej dwa elementy (a, b) i (c, d); załóżmy np., że $b < c$. Nie wszystkie liczby, leżące wewnątrz przedziału (b, c), mogą należeć do X, gdyż wtedy, jak łatwo widzieć, zbiór X zawierałby punkty wewnętrzne.

Niech y oznacza liczbę, leżącą wewnątrz (b, c), nie należącą do zbioru X. Istnieje więc, w myśl dowiedzionego twierdzenia, przedział (e, f), którego końce należą do zbioru X, nie zawierający wewnątrz żadnego elementu zbioru X i taki, iż $e < y < f$. Ponieważ przedziały (a, b), (c, d) i (e, f) nie mogą na siebie zachodzić, ani też się stykać, więc jasnem jest, że (wobec $b < y < c$ oraz $e < y < f$) musi być $b < e$ oraz $f < c$. Przedział (e, f) leży więc między przedziałami (a, b) i (c, d).

Udowodniliśmy więc, że zbiór Δ jest wszędziegęsty, w tem znaczeniu, że między każdemi dwoma przedziałami tego zbioru leży nowy przedział tegoż zbioru. Jasnem jest, że każdy zbiór wszędziegęsty jest nieskończony.

Zbiór Δ możemy uporządkować, uważając z dwóch jego przedziałów (a, b) i (c, d) ten za wcześniejszy, którego końce są mniejszemi liczbami. Powiadam, że zbiór Δ nie posiada elementu pierwszego ani

ostatniego. Dla dowodu wystarczyłoby znowu powołać się na założenie, że zbiór X jest doskonały i nie posiada punktów wewnętrznych.

A więc zbiór Δ jest przeliczalny, wszędziegęsty i nie posiada ani pierwszego ani ostatniego elementu. To samo oczywiście możemy powiedzieć o zbiorze P wszystkich prawych końców przedziałów zbioru Δ, uporządkowanym według wielkości (przyczem własność, że zbiór P jest wszędziegęsty, należy rozumieć tylko w ten sposób, że między każdemi dwoma elementami zbioru P znajduje się zawsze element tegoż zbioru). W myśl twierdzenia z art. 5-go Rozdz. III-go, zbiór P jest podobny zbiorowi wszystkich liczb wymiernych. Ustalmy więc odwzorowanie podobne zbioru P na zbiorze wszystkich liczb wymiernych.

Niech φ oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą. Zbudujmy ciąg liczb wymiernych u_n, stale rosnący i zmierzający do φ. Niech p_n oznacza odpowiedni ciąg elementów zbioru P. Wobec podobieństwa zbioru P i zbioru wszystkich liczb wymiernych, ciąg p_n będzie też stale rosnący i przytem ograniczony, gdyż oczywiście istnieją liczby wymierne większe od każdego z wyrazów ciągu u_n. Ciąg p_n, jako rosnący i ograniczony, musi więc być zbieżny: niech p oznacza jego granicę. Liczby p_n należą wszystkie do zbioru doskonałego X: granica ich p musi więc też należeć do tego zbioru.

Każdej liczbie rzeczywistej φ odpowiada więc pewien element p zbioru X. Powiadam, że różnym liczbom φ będą odpowiadały różne elementy zbioru X.

W samej rzeczy, niech ψ oznacza liczbę rzeczywistą $> \varphi$, zaś v_n — ciąg rosnący liczb wymiernych, zmierzający do ψ. Niech q_n oznacza odpowiedni ciąg elementów zbioru P, q—jego granicę. Ponieważ ciąg v_n zmierza do granicy $\psi > \varphi$, więc dla dostatecznie wielkich n, np. dla $n = k$, będzie $v_n > \varphi$, a więc $v_k > u_n$, przy wszelkiem n. Będzie więc też $q_k > p_n$ przy wszelkiem n, skąd $q_k \geqslant p$ i przeto też $q > q_k \geqslant p$, czyli $q \neq p$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli zbiór doskonały X nie zawiera żadnego punktu wewnętrznego, to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest równej mocy z pewną częścią zbioru X. Ale jest to prawdziwe i w tym przypadku, kiedy zbiór doskonały X zawiera punkty wewnętrzne.

A więc moc każdego zbioru doskonałego jest $\geqslant \mathfrak{c}$. Z drugiej zaś strony jest ona $\leqslant \mathfrak{c}$, gdyż każdy zbiór liczb rzeczywistych jest częścią zbioru wszystkich liczb rzeczywistych.

Dowiedliśmy więc, że każdy zbiór doskonały ma moc continuum.

Wobec twierdzenia z art. 2-go, że każdy zbiór zbiór zamknięty jest sumą zbioru conajwyżej przeliczalnego oraz pustego lub doskonałego, możemy wypowiedzieć też następujące

Twierdzenie. Każdy zbiór zamknięty jest skończony, przeliczalny, albo mocy continuum.

5. **Twierdzenie.** Każdy element zbioru doskonałego jest jego miejscem kondensacyi.

Założmy, dla dowodu, że dany element x zbioru doskonałego X nie jest jego miejscem kondensacyi. Istnieje więc w takim razie przedział (a, b) taki, iż $a < x < b$, i zawierający wewnątrz conajwyżej przeliczalną mnogość elementów zbioru X.

Można więc będzie wyznaczyć liczby α i β, nie należące do zbioru X i takie, iż $a < \alpha < x < \beta < b$. Oznaczmy przez X_0 część zbioru X, złożoną z tych wszystkich jego elementów, które leżą wewnątrz przedziału (α, β). Zbiór X_0, jak łatwo widzieć, jest doskonały.

W samej rzeczy, każdy element zbioru X_0 jest jego miejscem skupienia, gdyż jeżeli x_0 oznacza element zbioru X_0, a więc element zbioru X, leżący wewnątrz przedziału (α, β), to, wobec doskonałości zbioru X, można wyznaczyć ciąg nieskończony elementów zbioru X, zmierzający do x_0. Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu będą leżały wewnątrz przedziału (α, β), a więc będą wszystkie elementami zbioru X_0. Istnieje więc ciąg elementów zbioru X_0, zmierzający do x_0.

Dowiedliśmy więc, że zbiór X_0 jest w sobie gęsty. Udowodnimy obecnie, że jest zamknięty. Niech więc x_n oznacza ciąg zbieżny elementów zbioru X_0, g—jego granicę.

Liczba g musi być elementem zbioru X, wobec jego zamkniętości. Z drugiej strony, wobec $\alpha < x_n < \beta$ (gdyż wszystkie x_n należą do X_0), mamy: $\alpha \leqslant g \leqslant \beta$, a nawet $\alpha < g < \beta$, gdyż liczby α i β nie należą do zbioru X.

Jest więc g elementem zbioru X_0, co dowodzi, że ten ostatni jest zamknięty.

Zbiór X_0 jest zatem doskonały. Ale każdy zbiór doskonały jest, jak wiemy, mocy continuum: mielibyśmy więc wewnątrz przedziału (α, β), a więc, tembardziej, wewnątrz przedziału (a, b) nieprzeliczalną mnogość elementów zbioru X, wbrew założeniu.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia. Opierając się na niem, uzupełnimy obecnie twierdzenie z art. 2-go, dowodząc, że każdy zbiór zamknięty daje się w jeden tylko sposób przedsta-

wić jako suma dwóch zbiorów, z których pierwszy jest conajwyżej przeliczalny, a drugi pusty lub doskonały.

Niech X oznacza dany zbiór zamknięty i załóżmy, że

$$X = R + S,$$

gdzie R jest zbiorem conajwyżej przeliczalnym, zaś S zbiorem pustym lub doskonałym.

Jasnem jest, że jeżeli zbiór X jest conajwyżej przeliczalny, to zbiór S musi być pustym i $R = X$. Uważany rozkład jest więc wtedy jedyny. Załóżmy więc, że zbiór X jest nieprzeliczalny. Zbiór S nie może wtedy być pusty, a więc jest doskonały. Ale, jak dowiedliśmy, każdy element zbioru doskonałego jest jego miejscem kondensacyi. Każdy element zbioru S jest więc miejscem kondensacyi zbioru S i, tembardziej, zbioru X, którego S jest częścią. Ale i naodwrót: powiadam, że każdy element kondensacyi zbioru X musi należeć do S. Załóżmy dla dowodu, że k jest elementem kondensacyi zbioru X, nie należącym do S, a więc należącym do R. Wewnątrz każdego przedziału (a, b) takiego, iż $a < k < b$, mieści się nieprzeliczalna mnogość elementów zbioru X. Z nich conajwyżej przeliczalna może należeć do R, gdyż zbiór R jest conajwyżej przeliczalny. Istnieje więc wewnątrz (a, b) nieprzeliczalna mnogość elementów zbioru X, należących do S. Stąd wniosek, że k jest miejscem skupienia zbioru S, a więc jego elementem, gdyż zbiór S jest doskonały.

Dowiedliśmy więc, że zbiór S jest identyczny ze zbiorem K wszystkich tych elementów zbioru X, które są jego miejscami kondensacyi. Uważany rozkład $X = R + S$ jest więc jedyny, c. b. d. o.

6. Udowodnimy obecnie, że istnieją zbiory doskonałe, nie posiadające punktów wewnętrznych. Wystarczy więc, dla dowodu, dać choć jeden przykład takiego zbioru. Zanim jednak to zrobimy, wyciągniemy pewne ciekawe wnioski z założenia, że dany zbiór doskonały nie posiada punktów wewnętrznych.

Niech X oznacza taki zbiór, (α, β)—dowolny dany przedział. Nie wszystkie punkty, leżące wewnątrz (α, β), mogą należeć do X, gdyż wtedy zbiór X posiadałby punkty wewnętrzne, wbrew założeniu. Istnieje więc wewnątrz (α, β) taki punkt p, który nie należy do zbioru X. Wobec zamkniętości zbioru X, punkt p nie może też być miejscem skupienia tego zbioru. Można więc będzie wyznaczyć liczbę γ między α i p, oraz liczbę δ między p i β tak, iżby przedział (γ, δ) nie zawierał żadnego elementu zbioru X. A więc:

Jeżeli zbiór doskonały X nie posiada punktów wewnętrznych, to wewnątrz każdego przedziału (α, β) można wyznaczyć taki przedział (γ, δ), który nie zawiera żadnego elementu zbioru X.

Każdy zbiór, posiadający tę własność, że wewnątrz każdego danego przedziału można wyznaczyć inny przedział, nie zawierający żadnego elementu uważanego zbioru, nazywamy nigdziegęstym albo apantachicznym (nirgends dicht, non dense).

Przykładem zbioru nigdziegęstego jest każdy zbiór skończony, jakoteż każdy zbiór odosobniony.

Podamy obecnie przykład zbioru doskonałego, nigdziegęstego.

Nazywamy liczbą Liouville'a każdą liczbę

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots,$$

gdzie α_n są dowolnemi cyframi układu dziesiętnego, byleby różnemi od zera. W art. 15-ym Rozdz. II-go dowiedliśmy, że wszystkie liczby Liouville'a są liczbami przestępnemi.

Oznaczmy przez Ξ zbiór wszystkich liczb Liouville'a. Powiadam, że zbiór ten jest doskonały.

Udowodnimy przedewszystkiem, że zbiór Ξ jest w sobie gęsty. Niech

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^{k!}}$$

oznacza dany element zbioru Ξ. Połóżmy

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} + \frac{\alpha_n \pm 1}{10^{n!}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^{k!}},$$

obierając w wyrażeniu $\alpha_n \pm 1$ znak $+$, jeżeli α_n jest jedną z cyfr mniejszych od 9; zaś znak $-$ dla $\alpha_n = 9$.

Jasnem jest, że wszystkie liczby ξ_n będą elementami zbioru Ξ. Jeżeli nadto przypomnimy sobie, że każda liczba daje jedno tylko rozwinięcie na ułamek dziesiętny, istotnie nieskończony, to z łatwością dojdziemy do wniosku, że wszystkie liczby ξ_n są różne między sobą, jako też różne od liczby ξ. Z drugiej strony łatwo okazać, że ciąg ξ_n zmierza do ξ. Wystarczy w tym celu zauważyć, że

$$|\xi_n - \xi| < \frac{1}{10^{n!-1}},$$

gdyż rozwinięcia ξ_n i ξ różnią się dopiero w n-tym znaku dziesiętnym.

Zbiór Ξ jest więc w sobie gęsty. Udowodnimy obecnie, że jest zamknięty.

Niech ξ_n oznacza dany ciąg zbieżny liczb Liouville'a. Połóżmy

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{10^{k!}}.$$

Dla dowodu, że i granica tego ciągu jest liczbą Liouville'a, oprzemy się na następującej uwadze:

Jeżeli dwie liczby Liouville'a różnią się mniej (bezwzględnie), niż o $\frac{1}{9 \cdot 10^{m!}}$, to pierwsze m składników w rozwinięciach obu liczb są jednakowe.

W samej rzeczy, załóżmy, że pierwszemi składnikami, w których dwie dane liczby Liouville'a się różnią, są p-te. Mamy więc, oznaczając np. przez η większą z uważanych liczb, zaś przez ξ—mniejszą:

$$\xi = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} + \frac{\alpha_p}{10^{p!}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} + \frac{\alpha_p}{10^{p!}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^{k!}},$$

$$\eta \geqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} + \frac{\alpha_p+1}{10^{p!}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\alpha_k'}{10^{k!}} \geqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{10^{k!}} + \frac{\alpha_p+1}{10^{p!}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}},$$

skąd:

$$\eta - \xi \geqslant \frac{1}{10^{p!}} - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{8}{10^{k!}} > \frac{1}{10^{p!}} - \sum_{k=(p+1)!}^{\infty} \frac{8}{10^{k}} \geqslant \frac{1}{10^{p!}}\left(1 - \frac{8}{9}\right),$$

czyli ostatecznie:

$$\eta - \xi \geqslant \frac{1}{9 \cdot 10^{p!}}.$$

Jeżeli więc $|\eta - \xi| < \frac{1}{9 \cdot 10^{m!}}$, to $p > m$, czyli nasze liczby mają m pierwszych składników jednakowych, c. b. d. o.

Oznaczmy przez ξ granicę ciągu ξ_n. Przy każdem danem k musi być dla dostatecznie wielkich m i n stale

$$|\xi_m - \xi_n| < \frac{1}{9 \cdot 10^{k!}},$$

skąd wynika, że, poczynając od pewnego miejsca, wyrazy ciągu

$$\alpha_k', \alpha_k'', \ldots, \alpha_k^{(n)}, \ldots$$

będą jednakowe. Oznaczmy przez α_k ich wspólną wartość.

Jasnem jest, że przy dostatecznie wielkiem n, liczba ξ_n będzie się dowolnie mało różniła od liczby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}},$$

czyli, że ta ostatnia będzie granicą ciągu ξ_n, skąd

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}.$$

Wynika stąd natychmiast, że ξ jest liczbą Liouville'a.

Dowiedliśmy zatem, że zbiór Ξ jest doskonały.

Niech teraz x oznacza liczbę, nie należącą do zbioru Ξ, więc np. liczbę algebraiczną albo, w szczególności, liczbę wymierną.

Ponieważ zbiór Ξ jest doskonały, więc możemy wyznaczyć dla liczby x taki przedział (a, b), gdzie $a < x < b$, wewnątrz którego niema żadnego elementu zbioru Ξ. Skąd wniosek:

Każdą liczbę wymierną można otoczyć odpowiednim przedziałem, a pomimo to istnieć może mnogość mocy continuum liczb, nie leżących wewnątrz żadnego z tych przedziałów!

Teraz—powiemy wraz z Borelem—czytelnik chyba będzie mniej skłonny do sądzenia, że wie, co to jest continuum, i do rozumowania o niem, jako o pojęciu intuicyjnem i całkiem jasnem.

Rozpatrywany przez nas zbiór wszystkich liczb Liouville'a jest oczywiście nigdziegęsty, gdyż wewnątrz każdego przedziału możemy wyznaczyć liczbę wymierną, a więc też i przedział, nie zawierający żadnej liczby Liouville'a. Dowiedliśmy więc, że istnieją zbiory doskonałe nigdziegęste.

Pierwszy przykład takiego zbioru został podany jeszcze w r. 1883 przez Cantora[1]), jako zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, które objęte są wzorem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n},$$

gdzie każde c_n jest zerem lub dwójką. (Są to więc te wszystkie rozwinięcia skończone lub nieskończone w układzie trójkowym, do których wypisania nie używamy wcale cyfry 1). Przykład ten nadaje się też do

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 21, p. 590.

prostej ilustracyi geometrycznej. Podzielmy mianowicie odcinek $(0, 1)$ na trzy równe części i usuńmy wszystkie punkty, leżące wewnątrz odcinka środkowego (t. j. przedziału $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$). Z każdym z dwóch pozostałych odcinków (a więc z przedziałem $(0, \frac{1}{3})$ oraz $(\frac{2}{3}, 1)$) postąpmy podobnież, a więc podzielmy każdy z nich na trzy równe odcinki i usuńmy punkty wewnętrzne odcinków środkowych (t. j. przedziałów $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ oraz $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$). Z pozostałemi czterema odcinkami (czyli przedziałami $(0, \frac{1}{9})$, $(\frac{2}{9}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9})$ i $(\frac{7}{9}, 1)$) postąpimy podobnież i t. d.

Zbiór wszystkich tych punktów, które nie zostaną usunięte przy powtórzeniu powyższego procesu dowolnie wielką liczbę razy, tworzyć będzie mnogość doskonałą, nigdziegęstą.

Aby wskazać, w jaki sposób można dowieść, że zbiór ten jest identyczny ze zbiorem Cantora, zauważymy, że usunąć wszystkie liczby, leżące wewnątrz przedziału $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, znaczy to samo, co usunąć wszystkie te liczby przedziału $(0, 1)$, które w układzie trójkowym nie mogą być inaczej przedstawione jak tylko z pierwszą cyfrą po przecinku równą 1. Dalej, usuwając wewnętrzne punkty przedziałów $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ i $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, usuwamy te liczby, których druga cyfra po przecinku musi być w układzie trójkowym równa jedności i t. d.

Że zbiór wszystkich liczb

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n},$$

gdzie $c_n = 0$ lub 2, jest w sobie gęsty, możemy dowieść w następujący sposób. Niech x oznacza dany element naszego zbioru. Oznaczmy symbolem $k(c)$ różnicę $2-c$ i połóżmy:

$$x_m = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{k(c_m)}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}.$$

Jasnem jest, że ciąg x_m jest ciągiem samych różnych liczb naszego zbioru i że zmierza do x.

Że zbiór nasz jest nigdziegęsty, wynika to prawie bezpośrednio z podanej konstrukcyi geometrycznej. Aby wreszcie dowieść, że jest zamknięty, udowodnimy następujące ogólniejsze twierdzenie:

Zbiór wszystkich liczb, nie leżących wewnątrz żadnego z danej (choćby nieprzeliczalnej) mnogości przedziałów, o ile istnieje, jest zamknięty.

W samej rzeczy, niech Δ oznacza daną mnogość przedziałów, zaś X—zbiór wszystkich tych liczb, które nie leżą wewnątrz żadnego z prze-

działów mnogości Δ. Niech x_n oznacza ciąg zbieżny elementów zbioru X. Gdyby granica g tego ciągu nie należała do X, to liczba g leżałaby wewnątrz jednego conajmniej przedziału zbioru Δ. Ale w takim razie, przy dostatecznie wielkiem n, musiałyby leżeć wewnątrz tegoż przedziału i elementy x_n zbioru X—wbrew definicyi tego ostatniego.

Twierdzenie powyższe możnaby jeszcze uzupełnić uwagą, że jeżeli przedziały zbioru Δ nie zachodzą na siebie i nie stykają się, to zbiór X jest doskonały. Dla dowodu wystarczyłoby okazać, że zbiór X nie może wtedy posiadać punktów odosobnionych: lecz to jest jasnem, albowiem punkt odosobniony zbioru zamkniętego X byłby oczywiście wspólną granicą dwóch przedziałów zbioru Δ, które nie stykają się, jak zakładamy.

Istnienie zbiorów nigdziegęstych mocy continuum jest faktem nader pouczającym, zwłaszcza w zestawieniu z przeliczalnością wszędziegęstego zbioru wszystkich liczb wymiernych. Dowodzi on mianowicie, że gęstość zbioru jest niezależna od jego mocy.

Jeszcze inne, ciekawe wnioski można wysnuć z faktu istnienia zbiorów nigdziegęstych mocy continuum. Opierając się na nim, zbudujemy mianowicie taką mnogość punktów na płaszczyźnie, która, widziana w pewnym kierunku przedstawi nam się jako linia ciągła, w innym zaś—jako pewien zbior nigdziegęsty, pomimo, że za każdym razem będziemy widzieli wszystkie punkty naszej mnogości.

Oznaczmy przez X zbiór wszystkich liczb przedziału $(0, 1)$, zaś przez Y mnogość nigdziegęstą mocy continuum. Ponieważ moce zbiorów X i Y są równe, więc można między ich elementami ustalić odpowiedniość doskonałą. Niech $f(x)$ oznacza element zbioru Y, odpowiadający przytem elementowi x zbioru X.

Weźmy pod rozwagę zbiór P wszystkich tych punktów przestrzeni dwuwymiarowej, które się dadzą przedstawić w postaci

$$p = (x, f(x)), \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Rzut mnogości P na oś X-ów da oczywiście linię ciągłą, rzut zaś na oś Y-ów da zbiór nigdziegęsty. Bliższe rozpatrzenie tego przykładu pozostawiamy czytelnikowi.

7. Zbiór, który jest sumą skończonej albo przeliczalnej mnogości zbiorów nigdziegęstych, nazywamy, według Baire'a, zbiorem pierwszej kategoryi. Każdy zbiór, nie będący zbiorem pierwszej kategoryi nazywamy zbiorem drugiej kategoryi.

Zbiór pierwszej kategoryi może być nawet wszędziegęsty: np. zbiór wszystkich liczb wymiernych jest pierwszej kategoryi, gdyż możemy go

rozpatrywać jako sumę przeliczalnej mnogości zbiorów, z których każdy składa się z jednego tylko elementu, a więc jest nigdziegęsty.

Z drugiej strony łatwo dać przykład takiego zbioru pierwszej kategoryi, który wewnątrz każdego przedziału posiada nieprzeliczalną mnogość elementów. Takim jest np. zbiór wszystkich wymiernych wielokrotności liczb Liouville'a, jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać. Kategorya nie zależy zatem od mocy zbioru.

Jasnem jest, że suma skończonej albo przeliczalnej mnogości zbiorów pierwszej kategoryi jest znowu zbiorem pierwszej kategoryi; dla dowodu wystarczy się powołać na odnośną definicyę i na twierdzenie, że skończona albo przeliczalna mnogość zbiorów conajwyżej przeliczalnych jest mnogością conajwyżej przeliczalną.

Twierdzenie. Jeżeli X jest zbiorem pierwszej kategoryi, to zbiór X_0 wszystkich tych liczb rzeczywistych, które nie należą do X, jest wszędziegęsty.

Dowód. Zbiór X jest, jak zakładamy, pierwszej kategoryi, a więc jest sumą pewnego ciągu (skończonego lub nieskończonego) zbiorów nigdziegęstych

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots$$

Niech (a, b) oznacza dowolny dany przedział. Ponieważ zbiór X_1 jest nigdziegęsty, więc wewnątrz (a, b) możemy wyznaczyć przedział (a_1, b_1), nie zawierający żadnego elementu zbioru X_1. Ponieważ, dalej zbiór X_2 jest nigdziegęsty, więc wewnątrz przedziału (a_1, b_1) będziemy mogli wyznaczyć przedział (a_2, b_2), nie zawierający żadnego elementu zbioru X_2 i t. d. Otrzymamy w ten sposób pewien ciąg nieskończony przedziałów (a_n, b_n) takich, iż liczby a_n stale rosną, zaś liczby b_n stale maleją Ciągi a_n i b_n są więc ciągami podstawowemi, a przytem ograniczonemi, gdyż stale $a < a_n < b_n < b$. Ciągi a_n i b_n są więc zbieżne. Kładąc $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a_0$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n = b_0$, będziemy mieli oczywiście przy wszelkiem n:

$$a_n < a_0 \leqslant b_0 < b_n.$$

Jeżeli zatem oznaczymy przez x_0 liczbę dowolną, spełniającą nierówności $a_0 \leqslant x_0 \leqslant b_0$ (a liczba taka conajmniej jedna istnieje, gdyż $a_0 \leqslant b_0$), to będziemy mieli przy wszelkiem n:

$$a_n < x_0 < b_n,$$

co dowodzi, że liczba x_0 leży wewnątrz przedziału (a_n, b_n) i przeto, w myśl definicyi tego przedziału, nie należy do zbioru X_n.

Wyznaczona przez nas liczba x_0 nie będzie więc należała do żadnego ze zbiorów X_n, a zatem nie będzie też należała do zbioru X. Z drugiej strony, będzie oczywiście $a < x_0 < b$. Dowiedliśmy więc, że zbiór X_0 jest wszędziegęsty.

Zauważymy jeszcze, że możnaby dowieść, iż w każdym przedziale znajduje się mnogość mocy continuum elementów zbioru X_0.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika też natychmiast, że zbiór X_0 jest drugiej kategoryi. W samej rzeczy, gdyby zbiór X_0 był pierwszej kategoryi, to zbiór $X + X_0$, czyli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, byłby też pierwszej kategoryi, wbrew dowiedzonemu przed chwilą twierdzeniu, że mnogość elementów, nie należących do danego zbioru pierwszej kategoryi, jest zawsze wszędziegęsta.

Zbiory pierwszej i drugiej kategoryi odgrywają ważną rolę w różnych zastosowaniach Teoryi mnogości do Analizy[1]).

8. Nazywamy zbiorem pochodnym (albo pochodną) dla danego zbioru X zbiór X' wszystkich miejsc skupienia zbioru X (zarówno należących, jak i nie należących do X).

Więc np. pochodną dla zbioru wszystkich odwrotności liczb naturalnych będzie zbiór, złożony z jednego tylko elementu 0; pochodną dla zbioru wszystkich liczb wymiernych będzie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Zbiór wszystkich liczb naturalnych wcale nie posiada pochodnej.

Jak łatwo widzieć, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa jest równoważne następującemu:

Na to, aby dany zbiór ograniczony był skończony, potrzeba i wystarcza, iżby jego pochodna była zbiorem pustym.

Udowodnimy obecnie następujące

Twierdzenie. Pochodna każdego zbioru, o ile istnieje, jest zbiorem zamkniętym.

Dowód. Wystarczy dowieść, że jeżeli x_n' jest ciągiem zbieżnym elementów pochodnej X' danego zbioru X, to granica g ciągu x_n' też należy do X'.

Niech (a, b) oznacza dowolny przedział taki, iż $a < g < b$. Dla dostatecznie wielkich n, np. dla $n = p$, będzie $a < x_p' < b$, gdyż ciąg x_n' zmierza do g. Element x_p', jako należący do pochodnej X', jest miejscem skupienia zbioru X: możemy więc wyznaczyć element x zbioru X taki, iżby było $a < x < b$. Wobec dowolności przedziału, ota-

[1]) Zob. np. R. Baire. Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, 1905.

czającego g, dowodzi to, że g jest miejscem skupienia zbioru X, czyli elementem pochodnej X', co było do okazania.

Warunek, że dany zbiór X jest zamknięty, jest oczywiście równoważny warunkowi, że pochodna X' jest częścią zbioru X. Podobnież warunek, że zbiór X jest w sobie gęsty, jest równoważny warunkowi, że zbiór X jest częścią pochodnej X'. (Dla dowodu wystarczy powołać się na odnośne definicye). Stąd natychmiastowy wniosek, że dla zbioru doskonałego mamy $X = X'$, i naodwrót.

Oznaczmy przez X_i zbiór wszystkich punktów odosobnionych danego zbioru X, zaś przez X_g — zbiór wszystkich tych jego punktów, które są zarazem jego miejscami skupienia. Będzie oczywiście:

$$X = X_i + X_g.$$

Jasnem jest, że równość

$$X = X_i$$

wyraża, że zbiór X jest odosobniony, zaś równość

$$X = X_g,$$

że zbiór X jest w sobie gęsty, wreszcie równość

$$X' = X_g,$$

że zbiór X jest zamknięty.

Pochodną pochodnej X' danego zbioru X nazywamy drugą pochodną tego zbioru i oznaczamy przez X''. Podobnież mówimy o pochodnych trzeciego, czwartego i t. d., wogóle n-tego rzędu. Jeżeli żadna z nieskończonego ciągu kolejnych pochodnych

$$X', X'', X''', \ldots$$

nie jest zbiorem pustym, to można rozważać też pochodne t. zw. rzędów pozaskończonych.

W tym celu zauważymy przedewszystkiem, że każdy zbiór wypisanego wyżej ciągu jest częścią zbioru poprzedzającego. Dla dowodu wystarczy sobie przypomnieć, że każda pochodna jest zbiorem zamkniętym i że pochodna zbioru zamkniętego jest jego częścią.

Nazywamy pochodną rzędu ω, i oznaczamy symbolem X^{ω}, zbiór tych wszystkich liczb, które należą jednocześnie do każdego ze zbiorów $X^{(n)}$, przy wszelkiem naturalnem n. Udowodnimy, że jeżeli żaden ze zbiorów $X^{(n)}$ nie jest pusty, to i zbiór X^{ω} nie jest pusty i jest zamknięty.

Wyjdziemy w tym celu z pewnych ogólniejszych rozważań.

Nazywamy wspólnym dzielnikiem danej skończonej lub przeliczalnej mnogości zbiorów

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

i oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{D}(X_1, X_2, X_3, \ldots)$$

zbiór tych wszystkich liczb, które należą jednocześnie do każdego ze zbiorów $X_1, X_2, X_3, \ldots$

Zauważymy, że zbiór $\mathfrak{D}(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ może być pusty, pomimo, że żaden ze zbiorów X_n pusty nie jest i że każdy z nich jest zawarty w poprzedzającym. Przykład otrzymamy, jeżeli założymy, że X_n oznacza zbiór tych wszystkich liczb, które leżą wewnątrz przedziału $\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Udowodnimy jednak, że jeżeli każdy ze zbiorów X_n jest ograniczony i zamknięty, oraz zawarty w poprzedzającym, to ich wspólny dzielnik też jest zbiorem zamkniętym i przytem nie pustym.

Oznaczmy, dla dowodu, przez x_n jakikolwiek element zbioru X_n. Z ciągu nieskończonego x_n wyjmijmy ciąg zbieżny x_{r_n}; jest to możliwe, gdyż każdy wyraz x_n jest elementem zbioru ograniczonego X_1 (skoro każdy zbiór X_n jest zawarty w poprzedzającym). Oznaczmy przez x granicę ciągu x_{r_n}. Powiadam, że x będzie elementem każdego ze zbiorów X_n. W samej rzeczy, weźmy np. pod rozwagę zbiór X_p. Z wyrazów ciągu x_{r_n} tylko skończona ich liczba może nie należeć do X_p (mianowicie conajwyżej te, których wskaźnik r_n jest $< p$): dla dostatecznie wielkich n będą więc liczby x_{r_n} należały stale do X_p. Ale zbiór X_p jest zamknięty; odrzucając zaś z ciągu x_{r_n} te wyrazy, które ewentualnie nie należą do X_p, otrzymamy oczywiście ciąg, również zmierzający do x. Stąd wniosek, że x należy do X_p. Ale że p może oznaczać dowolny wskaźnik, więc dowiedliśmy, że x należy do każdego ze zbiorów X_n, a zatem też, że należy do ich wspólnego dzielnika. Ten ostatni zawiera więc conajmniej jeden element.

(Łatwo dać przykład, że przy warunkach naszego twierdzenia wspólny dzielnik zbiorów X_n może zawierać tylko jeden element. Tak będzie np., jeżeli X_n oznacza zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, które co do swej wartości bezwzględnej są $\leqslant \frac{1}{n}$. Jasnem jest, że wspólny dzielnik zbiorów X_n składa się tu z jednego tylko elementu, którym jest liczba 0).

Udowodnimy teraz, że zbiór $\mathfrak{D}(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ jest zamknięty. Niech więc ξ_k oznacza ciąg zbieżny elementów zbioru $\mathfrak{D}$, zaś ξ — jego granicę. Weźmy znowu pod rozwagę zbiór X_p. W myśl definicyi

wspólnego dzielnika, wszystkie liczby ξ_k muszą należeć do X_p, ale w takim razie, wobec zamkniętości tego zbioru i liczba ξ musi należeć do X_p. Liczba ξ jest więc elementem każdego ze zbiorów X_n, a przeto i ich wspólnego dzielnika. Dowiedliśmy, więc, że ten ostatni jest zamknięty.

Jeżeli więc żadna z pochodnych $X^{(n)}$ danego zbioru X nie jest zbiorem pustym, to zbiór $X^{\omega} = \mathfrak{D}(X', X'', X''', \ldots)$ zawiera conajmniej jeden element i jest zamknięty. Zbiory, dla których X^{ω} istnieje, nazywamy zbiorami drugiego gatunku, te zaś, dla których X^{ω} nie istnieje—zbiorami pierwszego gatunku.

Jeżeli X^{ω} istnieje, to można, dalej, mówić o pochodnej tego zbioru, którą oznaczamy przez $X^{\omega+1}$ i t. d. Spotkamy się z tem jeszcze w Rozdz. VIII-ym.

Pojęcie pochodnej stosuje się oczywiście (w tem samem brzmieniu definicyi) i do zbiorów punktów przestrzeni m-wymiarowej.

W art. 4-tym Rozdz. VI-go podaliśmy definicyę pojęcia spójności dla zbiorów zamkniętych. Rozszerzymy obecnie to pojęcie na zbiory niezamknięte, zawierające więcej niż jeden element, stawiając następującą definicyę:

Zbiór punktów przestrzeni m-wymiarowej nazywamy spójnym, jeżeli nie posiada elementów odosobnionych i jeżeli jego pochodna nie daje się rozbić na dwa zbiory zamknięte, nie mające wspólnych elementów.

Łatwo widzieć, że dla zbiorów zamkniętych definicya ta jest równoważna z podaną w Rozdz. VI-tym: wystarczy oprzeć się na uwadze, że zbiór zamknięty, nie posiadający elementów odosobnionych, jest identyczny ze swoją pochodną, a z drugiej strony, że zbiór zamknięty, posiadający elementy odosobnione, daje się rozbić na dwa zbiory zamknięte, nie mające wspólnych elementów.

9. Twierdzenie Borela. Jeżeli dla danego zbioru ograniczonego i zamkniętego X istnieje taki zbiór przedziałów Δ, że każdy element zbioru X znajduje się wewnątrz jednego przynajmniej z tych przedziałów, to istnieje taka **skończona** część Δ_0 zbioru Δ, że każdy element zbioru X znajduje się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_0.

Dowód. W myśl twierdzenia, dowiedzionego w art. 2-gim, istnieje (wobec warunków naszego twierdzenia) skończona albo przeliczalna część Δ_1 zbioru Δ, taka, iż każdy element zbioru X znajduje się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_1. Gdyby zbiór Δ_1 był skończony, to twierdzenia naszego nie potrzebowalibyśmy dowodzić.

Załóżmy więc, że zbiór Δ_1 jest przeliczalny, i ustawmy jego elementy w pewien ciąg nieskończony przedziałów:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3),$$

Gdyby twierdzenie, którego chcemy dowieść, nie było prawdziwe, to znaczyłoby to, że jakkolwiek wielką liczbę n wypisanych przedziałów obralibyśmy, zawsze znalazłby się w zbiorze X element, nie zawarty wewnątrz żadnego z tych n obranych przedziałów. Oznaczmy przez x_n jeden (dowolnie obrany) z tych właśnie elementów zbioru X, które nie mieszczą się wewnątrz żadnego z n pierwszych przedziałów ciągu (a_k, b_k): element taki, wobec uczynionej przed chwilą uwagi, będzie w każdym razie istniał. Weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Będzie to ciąg ograniczony, gdyż wszystkie jego wyrazy należą do zbioru X, który jest, jak zakładamy, ograniczony. Z ciągu x_n możemy więc wyjąć ciąg zbieżny x_{r_n}: granica x tego ciągu będzie elementem zbioru X, gdyż ten ostatni jest, jak zakładamy, zamknięty. A więc, w myśl warunków naszego twierdzenia i wobec uwagi, uczynionej na wstępie dowodu, znajdzie się w zbiorze Δ_1 taki przedział (a_p, b_p), wewnątrz którego będzie leżała liczba x. Ale w takim razie dla dostatecznie wielkich n musi być stale $a_p < x_{r_n} < b_p$. Nierówności $a_p < x_n < b_p$ będą więc spełnione w każdym razie przez nieskończenie wiele różnych wyrazów ciągu x_n, gdy tymczasem z definicyi ciągu x_n wynika, że nierówność $a_p < x_n < b_p$ nie może być spełniona przez żaden wyraz x_n, jeżeli $n \geqslant p$. Założenie, że twierdzenie Borela nie jest prawdziwe, doprowadziło nas zatem do sprzeczności.

Istnieje ścisły związek między twierdzeniem Borela a twierdzeniem Heinego[1]) o ciągłości jednostajnej funkcyi ciągłej w zbiorze zamkniętym. Związek ten uważa Schoenflies za tak ścisły, że łączy oba wspólną nazwą twierdzenia Heine-Borela.

Zauważymy, że twierdzenie Borela, przy odpowiedniej zmianie jego brzmienia, można rozciągnąć i na zbiory zamknięte punktów przestrzeni m-wymiarowej[2]).

---

[1]) Twierdzenie to znajduje się w pracy: „Die Elemente der Functionenlehre" (Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 74 (1872), p. 172-188), w której na kilkunastu stronach, treściwie, ale zarazem całkiem ściśle wyłożone są (pod wpływem Weierstrassa i Cantora) podwaliny współczesnej Analizy. Przestudyowanie tej pięknej rozprawy jest obowiązkiem każdego matematyka.

[2]) Zob. np. G. Bagnera: Una nuova dimostrazione di un teorema del sig. Borel Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. 28 (1909), p. 244.

10. Dotychczasowe badania nasze były czysto porządkowe: w rozważaniach naszych nie posługiwaliśmy się (z wyjątkiem przykładów) żadnemi działaniami arytmetycznemi na liczbach rzeczywistych, a w szczególności nie używaliśmy ani pojęcia sumy, ani pojęcia różnicy. Wprowadzenie tych dwóch działań arytmetycznych staje się jednak nieodzownem przy definicyi pojęcia miary, mającego wielkie znaczenie w zastosowaniach Teoryi mnogości do Analizy (dość powiedzieć, że cały Rachunek całkowy jest oparty na teoryi miary).

Niech X oznacza dany ograniczony zbiór liczb rzeczywistych.

Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B daną liczbę rzeczywistą β w tym i w tym tylko razie, jeżeli istnieje taki skończony zbiór przedziałów

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \qquad (1)$$

iż każdy element zbioru X zawiera się wewnątrz jednego przynajmniej z tych przedziałów i przytem

$$d = b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_n - a_n < \beta. \qquad (2)$$

Łatwo widzieć, że umowa taka wyznacza istotny przekrój.

Do klasy A będą należały w każdym razie wszystkie liczby, które są $\leqslant 0$; klasa B nie może być pusta, gdyż zbiór X jest, jak zakładamy, ograniczony: istnieje więc przedział (a, b), wewnątrz którego leżą wszystkie elementy zbioru X; każda liczba $\beta > b - a$ będzie oczywiście należała do klasy B.

Powiadam, że w klasie B niema elementu pierwszego. W samej rzeczy, załóżmy, że β oznacza dany element klasy B, że więc istnieje taki skończony ciąg przedziałów (1), iż każdy element zbioru X leży wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów tego ciągu i przytem zachodzi nierówność (2). Oznaczmy przez d lewą stronę nierówności (2). Wobec $d < \beta$ możemy wyznaczyć liczbę rzeczywistą β_1, leżącą między d i β. Z nierówności $d < \beta_1 < \beta$ wnosimy jednak, że β_1 jest elementem klasy B, mniejszym od β.

A więc, wobec ciągłości zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, w klasie A musi istnieć element ostatni. Liczbę tę nazywamy miarą zbioru X w znaczeniu Hankela-Cantora. (Brzmienie definicyi Hankela różni się nieco, a Cantora nawet znacznie od naszego, możnaby jednak z łatwością udowodnić, że wszystkie trzy definicye są równoważne).

Z definicyi naszej wynika natychmiast, że miara danego zbioru

ograniczonego X jest pewną liczbą nieujemną α, scharakteryzowaną przez następujące warunki:

1) Nie istnieje taki skończony zbiór przedziałów

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n),$$

iżby każdy punkt zbioru X zawierał się wewnątrz jednego przynajmniej z nich i żeby przytem było

$$b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_n - a_n < \alpha.$$

2) Jeżeli β oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą $> \alpha$, to istnieje taki skończony ciąg przedziałów

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n),$$

iż każdy punkt zbioru X leży wewnątrz jednego przynajmniej z nich i przytem

$$b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_n - a_n < \beta.$$

(Możnaby z łatwością okazać, że nie zmienilibyśmy w niczem definicyi miary, zakładając, że uważane przedziały na siebie nie zachodzą, albo nawet, że się nie stykają: bliższe zastanowienie się nad tem pozostawiamy czytelnikowi).

Ną szczególną uwagę zasługują te zbiory, których miara jest zerem: zbiory takie nazywamy n i e r o z c i ą g ł e m i (unausgedehnt).

Łatwo dowieść, że k a ż d y z b i ó r n i e r o z c i ą g ł y j e s t n i g d z i e g ę s t y.

W samej rzeczy, niech X oznacza dany zbiór nierozciągły, (a, b) — jakikolwiek przedział. Ponieważ miarą zbioru X jest zero, więc możemy wyznaczyć taki skończony ciąg przedziałów (1), iż każdy element zbioru X zawiera się wewnątrz jednego przynajmniej z nich i przytem

$$b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_n - a_n < b - a.$$

Nierówność ta dowodzi, że suma długości przedziałów (1) jest mniejsza od długości przedziału (a, b): jasnem jest wobec tego, że przedziały (1) nie mogą pokryć sobą całego przedziału (a, b): wewnątrz tego ostatniego znajdą się więc punkty, nie zawarte wewnątrz żadnego z przedziałów (1), a więc nie należące do zbioru X. Zbiór X jest więc nigdziegęsty.

Godnem uwagi jest jednak, że dowiedzione twierdzenie nie daje się odwrócić: mianowicie i s t n i e j ą z b i o r y n i g d z i e g ę s t e, k t ó r y c h m i a r a j e s t d o d a t n i a. Damy właśnie przykład takiego zbioru.

Podzielmy odcinek (0, 1) na pięć równych części i usuńmy wszystkie punkty, leżące wewnątrz odcinka środkowego (t. j. wewnątrz przedziału $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$). Z każdym z dwóch pozostałych odcinków, t. j. z przedziałami $(0, \frac{2}{5})$ oraz $(\frac{3}{5}, 1)$, postąpimy analogicznie, dzieląc każdy z nich na pięć równych części i usuwając wszystkie punkty, leżące wewnątrz odcinków środkowych (t. j. wewnątrz przedziałów $(\frac{4}{25}, \frac{6}{25})$ oraz $(\frac{19}{25}, \frac{21}{25})$). Z każdym z czterech pozostałych odcinków postąpimy analogicznie itd.

Oznaczmy przez X zbiór tych wszystkich punktów, które nie zostaną usunięte przy powtórzeniu powyższego procesu dowolnie wielką liczbę razy. Zbiór X będzie oczywiście nigdziegęsty. (Dla dowodu wystarczy zauważyć, że po pierwszym procesie długość każdego z nieusuniętych przedziałów wynosi $\frac{2}{5}$, po drugim $(\frac{2}{5})^2$, po trzecim $(\frac{2}{5})^3$ i t. d., a więc zmierza do zera. Po n-tym procesie znajdziemy więc w każdym odcinku, dłuższym od $(\frac{2}{5})^n$, cały przedział, nie należący do zbioru X).

Oznaczmy przez D_1 zbiór wszystkich usuniętych przedziałów. Suma długości wszystkich przedziałów zbioru D_1 wynosi oczywiście

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2^2}{5^3} + \ldots = \frac{1}{3},$$

gdyż przy pierwszym procesie usunęliśmy jeden przedział o długości $\frac{1}{5}$, przy drugim dwa o długościach $\frac{1}{5^2}$, przy trzecim—cztery o długościach $\frac{1}{5^3}$ i t. d.

Każdy punkt, nie należący do zbioru X, jest oczywiście zawarty wewnątrz jednego z przedziałów zbioru D_1.

Załóżmy, że miarą zbioru X jest zero. Do każdej liczby dodatniej, w szególności więc i do liczby $\frac{1}{3}$, możnaby więc dobrać taki skończony zbiór przedziałów

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$$

—nazwijmy go zbiorem D_2—iż każdy punkt zbioru X mieści się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru D_2, i że przytem suma długości wszystkich przedziałów zbioru D_2 jest mniejsza od $\frac{1}{3}$.

Połóżmy $\Delta = D_1 + D_2$. Jasnem jest, że każdy punkt odcinka (0, 1) musi się mieścić wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ (gdyż każdy punkt odcinka (0, 1) albo należy do X—i wtedy mieści się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru D_2, albo też nie należy do X—i wtedy mieści się wewnątrz jednego z przedziałów zbioru D_1).

Ponieważ zbiór wszystkich punktów odcinka (0, 1) (z włączeniem końców) jest zamknięty, więc do zbioru przedziałów Δ możemy zasto-

sować twierdzenie Borela (art. 9). Istnieje więc taka skończona część Δ_0 zbioru Δ, że każdy punkt odcinka (0, 1) mieści się wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_0. Lecz suma długości wszystkich przedziałów zbioru Δ_0 nie może oczywiście przenosić sumy długości wszystkich przedziałów zbioru $\Delta = D_1 + D_2$, która jest mniejsza od $\frac{2}{3}$. Skoro jednak suma długości przedziałów zbioru (skończonego) Δ_0 jest $< \frac{2}{3}$, to oczywiście nie mogą one pokryć całego odcinka (0, 1), o długości $= 1$. Znajdą się więc w przedziale (0, 1) punkty, nie zawarte wewnątrz żadnego z przedziałów zbioru Δ_0. Stąd sprzeczność. Dowiedliśmy więc, że miara zbioru nigdziegęstego X jest dodatnia.

Zauważymy, że możnaby nawet dowieść, że istnieją zbiory odosobnione (a więc przeliczalne i nigdziegęste zarazem), których miara jest dodatnia. Przykład takiego zbioru możnaby otrzymać, biorąc środki wszystkich tych odcinków, które usuwaliśmy przy tworzeniu zbioru X.

Z drugiej strony, istnieją zbiory nieprzeliczalne, których miara jest równa zeru. Przykładem jest mnogość doskonała nigdziegęsta Cantora, którą badaliśmy w art. 6-tym.

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę n tak wielką, aby było $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$ i powtórzmy przy tworzeniu mnogości Cantora n razy wiadomy proces usuwania odcinków. Suma długości wszystkich usuniętych przez to z przedziału (0, 1) odcinków, wyniesie, jak łatwo widzieć

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n;$$

suma długości pozostałych odcinków, do których więc będą należały wszystkie punkty zbioru Cantora, wyniesie zatem $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Niech p oznacza liczbę tych odcinków. Powiększymy każdy z nich z każdej strony o odcinek długości $\frac{\varepsilon}{2p}$: otrzymamy przez to p nowych odcinków, których suma długości wynosić będzie $\left(\frac{2}{3}\right)^n + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} < \varepsilon$, i przytem będziemy mogli już powiedzieć, że każdy punkt mnogości Cantora mieści się wewnątrz jednego przynajmniej z nich. Stąd dowód własności, o którą chodzi.

Istnieją więc zbiory nieprzeliczalne, których miara jest zerem, a z drugiej strony zbiory przeliczalne, których miara jest dodatnia.

Dowodzi to, że miara (w znaczeniu Hankela-Cantora) nie zależy od mocy zbioru.

Niech znowu X oznacza jakikolwiek dany, ograniczony zbiór liczb rzeczywistych. Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy A wszystkie liczby $\leqslant 0$, zaś z liczb dodatnich te tylko liczby α, dla których istnieje taki skończony zbiór przedziałów

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n),$$

iż każdy punkt każdego z nich należy do X, a przytem

$$b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \ldots + b_n - a_n > \alpha.$$

Możnaby z łatwością udowodnić, że umowa ta istotnie daje pewien przekrój, wyznaczający liczbę nieujemną, którą nazywamy miarą wewnętrzną danego zbioru X, w znaczeniu Peano-Jordana. (Definicye Peano oraz Jordana brzmieniem różnią się od naszej, są jednak jej równoważne). Definicya miary zewnętrznej danego zbioru w znaczeniu Peano-Jordana jest równoważna definicyi miary zbioru Hankela-Cantora.

Możnaby dalej, z łatwością okazać, że miara wewnętrzna jest zawsze nie większa od miary zewnętrznej: jeżeli, w szczególności, dla danego zbioru obie te miary są równe, to zbiór taki nazywamy mierzalnym w znaczeniu Jordana.

Inną, szerszą definicyę mierzalności dają Borel i Lebesgue.

Weźmy pod rozwagę jakikolwiek dany ograniczony zbiór X; niech (a, b) oznacza przedział, wewnątrz którego mieści się nasz zbiór.

Utwórzmy przekrój $[A, B]$, zaliczając do klasy B daną liczbę β w tym i tylko w tym razie, jeżeli istnieje taki ciąg skończony albo nieskończony przedziałów

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \ldots\ldots,$$

iż każdy element zbioru X mieści się wewnątrz jednego przynajmniej z nich, a przytem

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + \ldots < \beta.$$

Łatwo okazać (zupełnie tak samo jak przy mierze Hankela), że w klasie A istnieje liczba największa, nieujemna, którą Lebesgue nazywa miarą zewnętrzną zbioru X i oznacza symbolem $m_e(X)$.

Oznaczmy przez X_1 zbiór tych wszystkich punktów przedziału (a, b), które nie należą do X. Liczbę (jak łatwo widzieć, nieujemną):

$$(b - a) - m_e(X_1)$$

nazywa Lebesgue miarą wewnętrzną zbioru X i oznacza ją symbolem $m_i(X)$.

Opierając się na twierdzeniu Borela, możnaby z łatwością okazać, że stale

$$m_e(X) \geqslant m_i(X);$$

jeżeli, w szczególności, $m_e(X) = m_i(X)$, to zbiór X nazywamy mierzalnym w znaczeniu Lebesgue'a. Możnaby udowodnić, że każdy zbiór mierzalny w znaczeniu Lebesgue'a jest zarazem mierzalnym w znaczeniu Jordana, ale nie naodwrót. (Pojęcie mierzalności Lebesgue'a jest więc szersze niż Jordana).

W szczególności, mierzalnemi w znaczeniu Lebesgue'a są te zbiory, dla których $m_e(X) = 0$; łatwo widzieć (powołując się na odnośne definicye), że wtedy i miara Hankela jest zerem, ale niekoniecznie naodwrót. Naprzykład zbiór wszystkich ułamków właściwych dodatnich ma miarę Lebesgue'a równą zeru, miarę zaś Hankela równą jedności, jak to czytelnik z łatwością sprawdzi.

Miara zbioru w znaczeniu Lebesgue'a zależy poniekąd od jego mocy: np. można z łatwością dowieść, że miarą każdego zbioru przeliczalnego jest zero; jeżeli jednak wiemy o zbiorze tylko to, że jest nieprzeliczalny, to nie możemy nic o jego mierze powiedzieć.

Istnieją zbiory nigdziegęste o dodatniej mierze Lebesgue'a: jako przykład może służyć ten sam zbiór, który dawaliśmy dla miary Hankela-Cantora: dowód, jak łatwo widzieć, stosuje się prawie bez żadnej zmiany.

Godnem uwagi jest, że dotąd nie znamy żadnego zbioru, któryby nie był mierzalny w znaczeniu Lebesgue'a: nie udowodniono jednak jeszcze, że wszystkie zbiory są w znaczeniu Lebesgue'a mierzalne.

ROZDZIAŁ VIII.

Zbiory dobrze uporządkowane.

---

1. Dobrze uporządkowanym nazywamy zbiór uporządkowany, którego każda część posiada element pierwszy (art. 13, Rozdz. III-ci).

Niech G oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany, a—dany jego element. Zbiór A wszystkich elementów zbioru G, wcześniejszych od a, nazywać będziemy odcinkiem zbioru G, utworzonym przez element a. Jeżeli dla elementów zbioru A pozostawimy to uporządkowanie, jakie mają w zbiorze G, to A będzie oczywiście zbiorem dobrze uporządkowanym.

Jasnem jest, że odcinek odcinka danego zbioru dobrze uporządkowanego jest znowu odcinkiem danego zbioru.

Jeżeli między elementami dwóch zbiorów uporządkowanych jest ustalona odpowiedniość doskonała, przy której związki między odpowiedniemi elementami pozostają te same, to mówimy, że mamy odwzorowanie podobne jednego z uważanych zbiorów na drugim.

Lemmat I. Żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny swemu odcinkowi.

Dowód. Załóżmy, że pewien zbiór dobrze uporządkowany G jest podobny swemu odcinkowi A; niech a oznacza element zbioru G, przez który został utworzony odcinek A. W odwzorowaniu podobnem zbioru G na zbiorze A, elementowi a zbioru G musi odpowiadać pewien element a_1 zbioru A, przyczem będzie oczywiście $a_1 < a$, gdyż element a_1 należy, element zaś a już nie należy do odcinka A. Elementowi a_1

zbioru G musi, dalej, odpowiadać pewien element a_2 zbioru A, przytem ponieważ elementy a_2 i a_1 zbioru A odpowiadają elementom a_1 i a zbioru G, oraz $a_1 \prec a$, więc musi być też $a_2 \prec a_1$. Elementowi a_2 zbioru G musi, dalej, odpowiadać pewien element a_3 zbioru A, a że elementy a_3 i a_2 zbioru A odpowiadają elementom a_2 i a_1 zbioru G, oraz $a_2 \prec a_1$, więc musi być $a_3 \prec a_2$ i t d.

Moglibyśmy więc wyznaczyć w zbiorze G ciąg nieskończony elementów:

$$a \succ a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ, \ldots,$$

nie posiadający elementu najwcześniejszego, co przeczy założeniu, że G jest zbiorem dobrze uporządkowanym.

Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Wniosek. Dwa różne odcinki tego samego zbioru dobrze uporządkowanego nie są nigdy podobne.

Dowód. Niech A i A' będą dwa różne odcinki tego samego zbioru dobrze uporządkowanego, a i a' elementy, przez które te odcinki zostały utworzone. Elementy a i a' muszą być różne, a więc jeden jest wcześniejszy od drugiego. Jeżeli np. $a' \prec a$, to zbiór A' jest odcinkiem zbioru A: wystarczy więc, dla dowodu naszego wniosku, zastosować dowiedziony lemmat.

Lemmat II. Jeżeli każdy odcinek zbioru dobrze uporządkowanego G posiada podobny sobie odcinek w zbiorze dobrze uporządkowanym H i naodwrót, to zbiory G i H są podobne.

Dowód. Dla danego elementu a zbioru G wyznaczmy jego odcinek A. Odcinek ten posiada podobny sobie B w zbiorze H i, jak łatwo widzieć, tylko jeden (gdyż w przeciwnym razie dwa różne odcinki zbioru H musiałyby być sobie podobne, wbrew wnioskowi z lemmatu I). Niech b oznacza element zbioru H, przez który został utworzony odcinek B. Każdemu elementowi a zbioru G podporządkujmy wyznaczony w ten sposób element b zbioru H. Powiadam, że podporządkowanie to wyznacza odwzorowanie podobne zbiorów G i H. Z umowy powyższej wynika, że każdemu elementowi zbioru G odpowiada oznaczony w zupełności element zbioru H. Ale i naodwrót: każdy element zbioru H odpowiada pewnemu i przytem jednemu tylko elementowi zbioru G. W samej rzeczy, niech b oznacza dany element zbioru H, zaś B—utworzony przez ten element odcinek. W zbiorze G istnieje odcinek A, podobny odcinkowi B. Niech a oznacza element, przez który został utworzony odcinek A: jasnem jest, że elementowi a

zbioru G w ustalonem wyżej podporządkowaniu będzie odpowiadał element b zbioru H. Każdy element zbioru H jest więc podporządkowany pewnemu elementowi zbioru G. Dwóm różnym elementom zbioru G będą oczywiście odpowiadały różne elementy zbioru H, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy w zbiorze G dwa różne odcinki podobne sobie. Ustalone przez nas podporządkowanie jest więc jedno-jednoznaczne.

Niech teraz a i $a_1 \lessdot a$ będą dwa dane elementy zbioru G i niech b oznacza element zbioru H, odpowiadający w ustalonem wyżej podporządkowaniu elementowi a zbioru G. Odcinki A i B, utworzone przez elementy a i b, są podobne. Element a_1, jako wcześniejszy od a, możemy uważać za element odcinka A. Wobec podobieństwa odcinków A i B istnieje też odwzorowanie podobne zbioru A na zbiorze B: niech b_1 oznacza element zbioru B, odpowiadający w tem odwzorowaniu elementowi a_1 zbioru A: będzie oczywiście $b_1 \lessdot b$, gdyż b już nie należy do B. Jasnem jest dalej, że odcinki, utworzone przez a_1 i przez b_1, będą podobne. Elementowi a_1 zbioru G zostanie więc podporządkowany, według przyjętej umowy, element b_1 zbioru H. Dowiedliśmy więc, że jeżeli a i a_1 są dwa elementy zbioru G, zaś b i b_1—odpowiadajace im elementy zbioru H, to związek $a_1 \lessdot a$ pociąga za sobą związek $b_1 \lessdot b$. Uważane podporządkowanie jest więc odwzorowaniem podobnem.

Lemmat nasz udowodniliśmy zatem w zupełności.

Załóżmy teraz, że dwa dane zbiory dobrze uporządkowane G i H nie są podobne. W myśl lemmatu II-go, istnieje więc w jednym z tych zbiorów element, tworzący odcinek, który nie posiada sobie podobnego w drugim zbiorze. Jeżeli np. w zbiorze G istnieją takie elementy, to oznaczmy pierwszy z nich przez a (musi on istnieć, skoro zbiór G jest dobrze uporządkowany). Powiadam, że w takim razie każdy odcinek zbioru H posiada podobny sobie w zbiorze G. Załóżmy, dla dowodu, że tak nie jest, że więc istnieją w zbiorze H elementy, których odcinki nie posiadają sobie podobnych w zbiorze G: niech b oznacza właśnie pierwszy z takich elementów. Wobec definicyi elementu b, każdy element $b_1 \lessdot b$ tworzy odcinek B_1, mający swój podobny A_1 w zbiorze G: odcinek ten A_1 musi być odcinkiem odcinka A, utworzonego przez element a, gdyż w przeciwnym razie istniałby w zbiorze G element $a_1 \gtrdot$ lub $= a$, tworzący odcinek A_1, który posiada swój podobny w zbiorze H, skąd wynikałoby że tembardziej odcinek A posiada swój podobny w zbiorze H—wbrew definicyi elementu a. Zupełnie tak samo udowodnimy, że każdy element $a' \lessdot a$ tworzy odcinek A', mający swój podobny B' w zbiorze B. Stosując względem zbiorów A i B lemmat II, do-

szlibyśmy do wniosku, że odcinki A i B są podobne, wbrew definicyi elementów a i b.

Każdy zatem odcinek zbioru H posiada podobny sobie w zbiorze G, a nawet w zbiorze A, co udowodnimy jak wyżej (przy dowodzie, że A_1 jest odcinkiem zbioru A). Zbiory A i H spełniają więc warunki lemmatu II, są więc podobne. Stąd:

Twierdzenie. Dwa zbiory dobrze uporządkowane albo są podobne, albo też jeden z nich jest podobny pewnemu odcinkowi drugiego.

Łatwo widzieć, że przytem obie ewentualności wyłączają się wzajemnie. Gdyby bowiem dwa zbiory dobrze uporządkowane były podobne, a zarazem jeden z nich był podobny odcinkowi drugiego, to ten drugi zbiór byłby podobny swemu odcinkowi, np. zbiór H—swemu odcinkowi B, wbrew lemmatowi I.

2. Nazywać będziemy liczbami porządkowemi albo liczbami Cantora symbole, służące do oznaczania typów dobrze uporządkowanych.

Niech φ i ψ będą dwie dane liczby Cantora, G i H—zbiory dobrze uporządkowane, ktorym te liczby odpowiadają. Jeżeli liczby φ i ψ są różne, to zbiory G i H nie są podobne, a więc, w myśl twierdzenia z poprzedniego artykułu, będzie albo zbiór G podobny pewnemu odcinkowi zbioru H, albo też zbiór H podobny pewnemu odcinkowi zbioru G. W pierwszym przypadku będziemy pisali $\varphi < \psi$ (albo $\psi > \varphi$), w drugim: $\psi < \varphi$ (albo $\varphi > \psi$). Wobec takiej umowy z dwóch różnych liczb porządkowych zawsze jedna jest mniejsza, a druga większa.

Powiadam, że względność $<$ jest przechodnia. W samej rzeczy, niech φ, ψ, ϑ będą liczby Cantora takie, iż

$$\varphi < \psi \text{ oraz } \psi < \vartheta,$$

i niech G, H, K będą odpowiednie zbiory dobrze uporządkowane.

Wobec nierówności $\varphi < \psi$ jest zbiór G podobny pewnemu odcinkowi zbioru H, zaś wobec $\psi < \vartheta$ jest zbiór H podobny pewnemu odcinkowi zbioru K. Jest więc zbiór G podobny pewnemu odcinkowi pewnego odcinka zbioru K, czyli, poprostu, zbiór G podobny jakiemuś odcinkowi zbioru K. Stąd, wobec przyjętej umowy co do nierówności liczb porządkowych:

$$\varphi < \vartheta .$$

Przez przyjętą umowę zostaje więc każdy zbiór liczb Cantora

uporządkowanym. Powiadam dalej, że każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany (według wielkości).

Załóżmy dla dowodu, że istnieje zbiór liczb Cantora, który nie jest dobrze uporządkowany (przy uporządkowaniu jego elementów według ich wielkości). Istniałaby więc w uważanym zbiorze część, nie posiadająca pierwszego elementu. Jeżeli zatem φ_1 oznacza dany element tej części, to posiada ona element $\varphi_2 < \varphi_1$, dalej element $\varphi_3 < \varphi_2$ i t. d. Mielibyśmy więc ciąg nieskończony liczb Cantora stale malejących:

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \dots$$

Niech G_n oznacza ogólnie zbiór dobrze uporządkowany, któremu odpowiada liczba porządkowa φ_n. Wobec $\varphi_n < \varphi_1$ (dla $n > 1$), jest każdy zbiór G_n podobny pewnemu odcinkowi A_n zbioru G_1; niech a_n oznacza element zbioru G_1, przez który został utworzony odcinek A_n. Zbiór G_{n+1} jest podobny pewnemu odcinkowi zbioru G_n — wobec nierówności $\varphi_{n+1} < \varphi_n$; jest więc odcinek A_{n+1} odcinkiem odcinka A_n, skąd $a_{n+1} \lessdot a_n$. Mielibyśmy więc w zbiorze G_1 ciąg nieskończony elementów a_n, nie posiadający elementu najwcześniejszego, co jest niemożliwe, skoro zbiór G_1 jest dobrze uporządkowany.

Liczby porządkowe, odpowiadające zbiorom skończonym, nazywać będziemy liczbami pierwszej klasy: będą to wszystkie liczby naturalne. Liczby porządkowe, odpowiadające zbiorom dobrze uporządkowanym nieskończonym, nazywamy liczbami porządkowemi pozaskończonemi: te z nich, które odpowiadają zbiorom przeliczalnym, nazywamy liczbami drugiej klasy. Łatwo widzieć, że najmniejszą liczbą drugiej klasy jest liczba pozaskończona ω, odpowiadająca zbiorowi wszystkich liczb naturalnych (w ich naturalnym porządku).

3. W art. 11-ym Rozdz. III-go wprowadziliśmy pojęcie sumy typów porządkowych, zaś w art. 12-ym tegoż rozdziału — pojęcie ich iloczynu.

Udowodnimy obecnie, że suma oraz iloczyn dwóch typów dobrze uporządkowanych jest znowu typem dobrze uporządkowanym.

Niech $G = G_1 + G_2$ oznacza sumę dwóch zbiorów dobrze uporządkowanych, zaś H niech oznacza daną część zbioru G. Mogą zachodzić dwa przypadki: 1) Część H zawiera conajmniej jeden element zbioru G_1: wśród tych elementów musi być jeden pierwszy, gdyż G jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Jasnem jest, że pierwszy z elemen-

tów zbioru G_1, należących do H, będzie zarazem pierwszym elementem zbioru H. 2) Część H zawiera same tylko elementy zbioru G_2: jasnem jest znowu, że wtedy H musi posiadać element pierwszy, jako część zbioru dobrze uporządkowanego G_2. W każdym więc razie część H zbioru G posiada element pierwszy, co dowodzi, że zbiór G jest dobrze uporządkowany.

Niech teraz $G = G_1 \,.\, G_2$ oznacza iloczyn zbiorów dobrze uporządkowanych G_1 i G_2, czyli zbiór wszystkich układów (g_1, g_2), gdzie g_1 oznacza jakikolwiek element zbioru G_1, zaś g_2 — element zbioru G_2. Niech znowu H oznacza jakąkolwiek daną część zbioru G. Wśród elementów g_1, przy których układy (g_1, g_2) należą do H istnieje jeden najwcześniejszy (gdyż elementy te tworzą część zbioru dobrze uporządkowanego G_1): niech to będzie element a. W zbiorze H istnieje więc conajmniej jeden układ (a, g_2). Wśród elementów g_2, przy których układ (a, g_2) należy do H, istnieje jeden najwcześniejszy (gdyż elementy te tworzą część zbioru dobrze uporządkowanego G_2): niech to będzie element b. Jasnem jest, że układ (a, b) będzie pierwszym elementem części H. Każda część zbioru G posiada więc element pierwszy, co dowodzi, że zbiór ten jest dobrze uporządkowany.

Dowiedzione twierdzenie o sumie oraz iloczynie dwóch zbiorów dobrze uporządkowanych daje się natychmiast uogólnić na większą (byleby skończoną) liczbę zbiorów.

Powiadam, że nawet suma nieskończonego szeregu zbiorów dobrze uporządkowanych jest zbiorem dobrze uporządkowanym. W samej rzeczy, niech będzie

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots,$$

gdzie zbiory G_n są wszystkie dobrze uporządkowane. Niech H oznacza daną część zbioru G, zaś p — najmniejszy wskaźnik, przy którym elementy zbioru G_p jeszcze należą do H. Jasnem jest, że najwcześniejszy z elementów zbioru G_p, należących do H, będzie zarazem pierwszym elementem zbioru H. Stąd natychmiastowy wniosek, że zbiór G jest dobrze uporządkowany.

Jako wniosek z powyższych twierdzeń, otrzymujemy

Twierdzenie. Suma i iloczyn skończonej liczby liczb porządkowych jest znowu liczbą porządkową. Suma nieskończonego szeregu liczb porządkowych jest znowu oznaczoną w zupełności liczbą porządkową.

Powiadam, że suma dwóch liczb porządkowych jest zawsze większa od pierwszego składnika.

Niech γ_1 i γ_2 będą dwie dane liczby porządkowe, G_1 i G_2—dwa dane zbiory. Liczba porządkowa $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ odpowiadać będzie zbiorowi $G = G_1 + G_2$. Niech b oznacza pierwszy element zbioru G_2: jasnem jest, że zbiór G_1 możemy uważać jako odcinek zbioru G; utworzony przez element b, stąd, wobec definicyi nierówności liczb porządkowych, wnosimy, iż $\gamma > \gamma_1$, c. b. d. o.

Zauważymy, że jednak nie zawsze suma dwóch liczb porządkowych jest większa od drugiego składnika: mamy np.

$$1 + \omega = \omega .$$

Można tylko powiedzieć, że suma dwóch liczb porządkowych nie jest nigdy mniejsza od swego drugiego składnika. Wynika to natychmiast z pewnego ogólniejszego twierdzenia, mianowicie:

Część zbioru dobrze uporządkowanego G jest zawsze podobna albo zbiorowi G, albo też pewnemu odcinkowi tego zbioru.

Załóżmy, wbrew twierdzeniu, że część H zbioru dobrze uporządkowanego G nie jest podobna ani zbiorowi G, ani też żadnemu odcinkowi tego zbioru. W takim razie, w myśl twierdzenia z artykułu 1-go, zbiór G musiałby być podobny pewnemu odcinkowi zbioru H, np. odcinkowi H_1, utworzonemu przez element a_1 zbioru H. W odwzorowaniu podobnem zbioru G na zbiorze H_1 elementowi a_1 zbioru G musi odpowiadać element a_2 zbioru H_1. Element a_2 zbioru G jest oczywiście wcześniejszy od a_1, gdyż a_1 nie należy do odcinka H_1; wobec tego elementowi a_2 zbioru G musi odpowiadać element a_3 zbioru H_1, wcześniejszy od a_2. Rozumując w ten sposób dalej (jak już nieraz), doszlibyśmy do wniosku, że w zbiorze dobrze uporządkowanym G istnieje ciąg nieskończony elementów a_n, nie posiadający elementu najwcześniejszego. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Niech α oznacza daną liczbę porządkową; $\alpha + 1$ też będzie liczbą porządkową i przytem będzie

$$\alpha + 1 > \alpha .$$

Powiadam, że między liczbami α i $\alpha + 1$ niema żadnej liczby porządkowej.

Niech G oznacza zbiór dobrze uporządkowany, odpowiadający liczbie porządkowej α. Liczba $\alpha + 1$ odpowiada oczywiście zbiorowi G_1, otrzymanemu przez dołączenie do zbioru G jednego nowego elementu a, który należy uważać jako późniejszy od wszystkich elementów zbioru G. Jasnem jest, że zbiór G możemy uważać jako odcinek

zbioru G_1, utworzony przez element a. Niech teraz φ oznacza jakąkolwiek liczbę porządkową $< \alpha + 1$. Zbiór F, odpowiadający liczbie φ, musi być odcinkiem zbioru G_1: niech b oznacza element, przez który został utworzony odcinek F. Ponieważ a jest ostatnim elementem zbioru G_1, więc musi być $b = a$ lub $b \lessdot a$. W pierwszym przypadku będzie oczywiście $\varphi = \alpha$, w drugim $\varphi < \alpha$. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Liczba porządkowa $\alpha + 1$ następuje więc bezpośrednio po liczbie α.

Otrzymane wyniki możemy streścić w twierdzeniu:

Każda liczba porządkowa α posiada swoją następną, którą jest liczba $\alpha + 1$.

Nie każda jednak liczba porządkowa posiada swoją poprzednią (bezpośrednią): np. nie posiada jej liczba ω. Jeżeli liczba porządkowa α posiada swoją poprzednią β, to oczywiście α jest liczbą następną dla β, tak, iż

$$\beta + 1 = \alpha;$$

jasnem jest też, że przy danem α liczba β (o ile istnieje) jest jedynem rozwiązaniem wypisanego przed chwilą równania. Będziemy ją więc oznaczali symbolem $\alpha - 1$. A więc:

Jeżeli liczba porządkowa α posiada swoją poprzedzającą, to tę ostatnią oznaczamy symbolem $\alpha - 1$.

Liczby porządkowe, posiadające swe poprzedzające, nazywamy liczbami pierwszego rodzaju, nie posiadające zaś swych poprzedzających — liczbami drugiego rodzaju. Więc np. 3, $\omega + 1$ — będą to liczby pierwszego rodzaju, zaś ω, $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$ — liczby drugiego rodzaju.

Jeżeli mamy dwie liczby porządkowe φ i $\psi > \varphi$, to zawsze istnieje jedna i przytem jedna tylko liczba porządkowa ϑ taka, iż

$$\psi = \varphi + \vartheta.$$

Dowód. Niech F i G będą zbiory, odpowiadające liczbom φ i ψ.

Wobec $\psi > \varphi$, jest zbiór F podobny pewnemu odcinkowi H zbioru G. Jeżeli oznaczymy przez K zbiór wszystkich elementów zbioru G, nie należących do H, to będzie oczywiście

$$G = H + K.$$

Jeżeli dalej przez ϑ oznaczymy liczbę, odpowiadającą zbiorowi K (a zbiór ten, jako część zbioru dobrze uporządkowanego musi być dobrze uporządkowany), to będzie oczywiście

$$\psi = \varphi + \vartheta.$$

Załóżmy teraz, że mamy jednocześnie $\psi = \varphi + \vartheta$ oraz $\psi = \varphi + \vartheta_1$, i że liczby ϑ i ϑ_1 są różne, np. $\vartheta > \vartheta_1$. Moglibyśmy więc wyznaczyć przynajmniej jednę liczbę τ taką, iż $\vartheta = \vartheta_1 + \tau$. Byłoby więc jednocześnie:

$$\psi = \varphi + \vartheta_1$$

oraz:

$$\psi = \varphi + (\vartheta_1 + \tau).$$

Ale, wobec łączności dodawania typów, mamy oczywiście:

$$\psi = \varphi + (\vartheta_1 + \tau) = (\varphi + \vartheta_1) + \tau = \psi + \tau,$$

czyli

$$\psi = \psi + \tau,$$

wbrew twierdzeniu, że suma dwóch liczb porządkowych jest większa od pierwszego składnika.

Dowiedliśmy więc, że dla dwóch danych liczb porządkowych φ i $\psi > \varphi$ istnieje jedna i jedna tylko liczba ϑ, spełniająca równanie

$$\psi = \varphi + \vartheta.$$

O tej liczbie ϑ możemy naturalnie powiedzieć tylko to, że jest nie większa od ψ. Np. dla $\psi = \omega$, $\varphi = 4$, będzie $\vartheta = \omega$.

Udowodnione twierdzenie pozwala nam ustalić odpowiedniość doskonałą między szeregami nieskończonemi liczb porządkowych, z jednej strony, a ciągami nieskończonemi rosnącemi liczb porządkowych — z drugiej.

W samej rzeczy, niech

$$\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

będzie dany szereg nieskończony liczb porządkowych.

Połóżmy

$$\sigma_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n \text{ (dla } n = 1, 2, 3, \dots).$$

Mamy oczywiście

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \varphi_{n+1}, \quad \text{skąd} \quad \sigma_{n+1} > \sigma_n.$$

Ciąg sum cząstkowych σ_n jest więc ciągiem liczb porządkowych stale rosnących.

Niech teraz σ_n oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony liczb porządkowych stale rosnących. Powiadam, że istnieje jeden i przytem jeden tylko szereg nieskończony liczb porządkowych

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots,$$

którego sumami cząstkowemi będą liczby σ_n.

Na to, aby sumami cząstkowemi wypisanego szeregu były liczby σ_n, potrzeba i wystarcza, iżby zachodziły równości:

$$\sigma_1 = \varphi_1 ,$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \varphi_n \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Pierwsza z tych równości wyznacza liczbę φ_1, przy wszelkiem zaś $n > 1$ równanie $\sigma_n = \sigma_{n-1} + \varphi_n$, wobec $\sigma_n > \sigma_{n-1}$, posiada jedno i jedno tylko rozwiązanie względem φ_n. Żądany szereg istnieje zatem i jest tylko jeden.

Połóżmy

$$\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$$

Powiadam, że będzie to najmniejsza liczba porządkowa, większa od każdej z liczb σ_n. Oznaczmy przez G_n zbiór, odpowiadający liczbie φ_n, i połóżmy

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$$

—będzie to zbiór, odpowiadający liczbie σ. Liczba σ_n będzie oczywiście odpowiadała zbiorowi

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n ,$$

czyli odcinkowi zbioru G, utworzonemu przez pierwszy element zbioru G_{n+1}. Stąd nierówność $\sigma > \sigma_n$. Liczba σ jest więc większa od każdej z liczb σ_n.

Załóżmy teraz, że σ' oznacza liczbę $\lneqq \sigma$. Liczba σ' musi więc odpowiadać pewnemu odcinkowi A zbioru G, np. odcinkowi, utworzonemu przez element a. Niech G_p oznacza zbiór, do którego należy element a. Będzie oczywiście zbiór A odcinkiem zbioru

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_p ,$$

skąd nierówność $\sigma' < \sigma_p$. Żadna liczba mniejsza od σ nie jest więc większa jednocześnie od każdej z liczb σ_n.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Dla każdego ciągu nieskończonego σ_n liczb porządkowych stale rosnących istnieje pierwsza liczba porządkowa σ, większa od każdego z wyrazów uważanego ciągu.

Niech Z oznacza jakikolwiek zbiór liczb porządkowych, zawierający liczby σ_n i liczbę σ. W myśl przyjętej w art. 6-ym Rozdz. III-go definicyi granicy ciągów podstawowych, będziemy w zbiorze Z mieli

$$\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n .$$

Wobec tego będziemy wogóle pierwszą liczbę porządkową, większą od każdego z wyrazów pewnego ciągu stale rosnącego, nazywali **granicą** tego ciągu.

Jest więc np.

$$\lim_{n=\infty} n = \omega, \ \lim_{n=\infty} (\omega + n) = \omega + \omega, \ \lim_{n=\infty} n \, . \, \omega = \omega \, . \, \omega.$$

4. Zapoznamy się teraz bliżej z początkowemi liczbami klasy II-ej. Najmniejszą liczbą klasy II-ej jest, jak wiemy, liczba ω, następująca bezpośrednio po wszystkich liczbach klasy I-szej (t. j. pierwsza liczba porządkowa, większa od każdej liczby naturalnej).

Po liczbie ω następują kolejno liczby:

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots \omega + n, \ldots$$

Pierwszą liczbą, większą od każdej z nich, jest oczywiście liczba $\omega + \omega = \omega \, . \, 2$. Po niej następują kolejno:

$$\omega \, . \, 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \omega \, . \, 2 + 3, \ldots \omega \, . \, 2 + n, \ldots$$

Pierwszą liczbą większą od każdej z nich jest oczywiście $\omega \, . \, 2 + \omega = \omega \, . \, 3$. Postępując w ten sposób dalej, otrzymujemy ogólnie liczby kształtu

$$\omega \, . \, n + k,$$

gdzie k i n są liczbami naturalnemi. Pierwszą liczbą, większą od każdej z liczb tego kształtu jest, jak łatwo dowieść, liczba

$$\lim_{n=\infty} \omega \, . \, n = \omega \, . \, \omega,$$

którą oznaczamy też symbolem ω^2. Liczba ta odpowiada, jak łatwo widzieć, zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych formy

$$k - \frac{1}{n}$$

(k i n—dowolne liczby naturalne), uporządkowanemu według wielkości.

Po liczbie ω^2 następują kolejno liczby

$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 + 3, \ldots, \omega^2 + n,$$

a pierwszą liczbą, większą od nich wszystkich, jest $\omega^2 + \omega$.

Po niej następują kolejno liczby:

$$\omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \omega^2 + \omega + 3, \ldots,$$

po których pierwszą jest $\omega^2 + \omega + \omega^2 = \omega^2 + \omega \, . \, 2$.

W ten sposób dochodzimy znowu ogólnie do liczb kształtu

$$\omega^2 + \omega \cdot n + k,$$

gdzie n i k są liczbami naturalnemi. Pierwszą liczbą, większą od nich wszystkich jest, jak łatwo widzieć, liczba

$$\lim_{n=\infty} (\omega^2 + \omega \cdot n) = \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2.$$

Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy ogólnie do liczb kształtu

$$\omega^2 \cdot m + \omega \cdot n + k,$$

gdzie m, n i k są liczbami naturalnemi. Pierwszą liczbą, większą od nich wszystkich jest, jak łatwo widzieć, liczba

$$\lim_{m=\infty} \omega^2 \cdot m = \omega^2 \cdot \omega,$$

którą oznaczamy przez ω^3.

Idąc w ten sposób dalej, dochodzimy ogólnie do liczb kształtu:

$$\omega^p \cdot n_0 + \omega^{p-1} n_1 + \omega^{p-2} \cdot n_2 + \ldots + \omega \cdot n_{p-1} + n_p,$$

gdzie p oraz n_i $(i = 0, 1, 2, \ldots p)$ są liczbami naturalnemi, zaś ω^k oznacza przez skrócenie iloczyn k czynników, równych ω.

Możnaby dalej z łatwością dowieść, że pierwszą liczbą, większą od każdej z liczb tego kształtu, jest liczba

$$\lim_{p=\infty} \omega^p,$$

którą oznaczamy symbolem ω^ω. Łatwo dać przykład zbioru dobrze uporządkowanego, któremu odpowiada ta liczba. Weźmy w tym celu pod rozwagę zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych i uporządkujmy go w następujący sposób. Z dwóch danych ciągów ten uważamy za wcześniejszy, który posiada mniejszą liczbę wyrazów, zaś w razie równej liczby wyrazów w obu ciągach uważamy ten za wcześniejszy, w którym wcześniej napotykamy wyraz, mniejszy od odpowiedniego wyrazu drugiego ciągu.

Pozostawiamy czytelnikowi łatwy dowód, że zbiór ten będzie dobrze uporządkowany i że odpowiadać mu będzie liczba porządkowa.

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \ldots = \omega^\omega.$$

Po liczbie ω^ω następują liczby:

$$\omega^\omega + 1, \omega^\omega + 2, \omega^\omega + 3, \ldots,$$

po nich liczba $\omega^\omega + \omega$ i t. d. Ogólnie, dojdziemy znowu do liczb kształtu

$$\omega^{\omega} + \omega^{p} n_0 + \omega^{p-1} n_1 + \ldots + \omega \,.\, n_{p-1} + n_p$$

(p oraz n_i—liczby naturalne), po których pierwszą liczbą porządkową jest

$$\omega^{\omega} + \omega^{\omega} = \omega^{\omega} \,.\, 2 \,.$$

Idąc dalej, napotykamy między innemi liczby (nie kolejne jednak):

$$\omega^{\omega} \,.\, 3, \quad \omega^{\omega} \,.\, 4, \quad \omega^{\omega} \,.\, 5, \ldots$$

po których pierwszą jest liczba

$$\lim_{n=\infty} \omega^{\omega} \,.\, n = \omega^{\omega} \,.\, \omega ,$$

którą oznaczamy przez $\omega^{\omega+1}$.

Napotkamy dalej ciąg liczb

$$\omega^{\omega+1}, \; \omega^{\omega+2}, \; \omega^{\omega+3}, \ldots ,$$

którego granicę oznaczymy przez $\omega^{\omega \cdot 2}$, dalej znowu ciąg liczb

$$\omega^{\omega \cdot 2}, \; \omega^{\omega \cdot 3}, \; \omega^{\omega \cdot 4}, \ldots$$

którego granicę oznaczymy symbolem ω^{ω^2}. Dalej jeszcze spotkamy ciąg liczb

$$\omega^{\omega^2}, \; \omega^{\omega^3}, \; \omega^{\omega^4}, \ldots ,$$

którego granicę oznaczymy przez $\omega^{\omega^{\omega}}$.

Idąc jeszcze dalej, otrzymamy ciąg liczb

$$\omega, \; \omega^{\omega}, \; \omega^{\omega^{\omega}}, \; \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots ,$$

którego granicę trzebaby oznaczyć już osobnym symbolem, np. ω_1. Po liczbie tej następują dalej kolejno:

$$\omega_1 + 1, \; \omega_1 + 2, \; \omega_1 + 3, \ldots$$

i t. d., i t. d. bez końca.

Łatwo widzieć, że wszystkie te liczby będą odpowiadały zbiorom przeliczalnym; dla dowodu wystarczyłoby się oprzeć na uwadze że: 1) liczba, której poprzedzająca jest klasy II-giej, jest sama klasy II-giej, oraz: 2) granica ciągu liczb klasy II-giej jest znowu liczbą klasy II-giej. (To ostatnie twierdzenie wynika natychmiast z twierdzenia, że mnogość przeliczalna mnogości przeliczalnych jest sama mnogością przeliczalną).

5. Zachodzi teraz pytanie, czy zbiór wszystkich liczb porządkowych II-giej klasy jest przeliczalny?

Załóżmy, że zbiór wszystkich liczb porządkowych II-giej klasy

jest przeliczalny. Możnaby więc je wszystkie ustawić w pewien ciąg nieskończony

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

Niech G_n oznacza zbiór, odpowiadający liczbie φ_n. Wszystkie zbiory G_n są przeliczalne, gdyż, jak zakładamy, wszystkie φ_n są liczbami klasy II-giej. Przeliczalnym będzie też zbiór

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots,$$

odpowiadający liczbie

$$\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$$

Liczba σ będzie więc klasy II-giej.

Wobec twierdzenia, udowodnionego w art. 3-im, liczba σ jest większa od każdej z sum cząstkowych

$$\sigma_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

Lecz, wobec

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \varphi_n,$$

mamy:

$$\sigma_n \geqq \varphi_n,$$

gdyż, jak wiemy z art. 3-go, suma dwóch liczb porządkowych nie jest mniejsza od drugiego składnika.

Nierówności

$$\sigma > \sigma_n \quad \text{oraz} \quad \sigma_n \geqq \varphi_n$$

dają:

$$\sigma > \varphi_n,$$

co dowodzi, że liczba σ nie jest zawarta w ciągu φ_n.

Istniałaby więc liczba klasy II-giej, nie zawarta w naszym ciągu, skąd sprzeczność.

Dowiedliśmy więc, że zbiór wszystkich liczb klasy drugiej jest nieprzeliczalny.

Liczbę kardynalną zbioru wszystkich liczb porządkowych klasy II-giej oznaczamy literą hebrajską alef ze wskaźnikiem 1:

$$\aleph_1.$$

Jeżeli więc wszystkie zbiory nieskończone liczb wymiernych, które, uporządkowane według wielkości, są dobrze uporządkowane, podzielimy na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy wszystkie zbiory podobne, to liczbą kardynalną mnogości wszystkich klas, w ten sposób otrzymanych, będzie liczba $\aleph_1$.

Liczbę kardynalną zbioru wszystkich liczb porządkowych klasy I-szej (czyli liczbę ω) oznaczamy przez analogię symbolem

$$\aleph_0 .$$

Mamy więc nierówność

$$\aleph_0 < \aleph_1 ,$$

wyrażającą, że liczba kardynalna $\aleph_1$ odpowiada zbiorowi nieprzeliczalnemu.

Powiadam, że niema takiej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, którąby spełniała nierówność:

$$\aleph_0 < \mathfrak{m} < \aleph_1 .$$

Załóżmy dla dowodu, że $\mathfrak{m}$ oznacza liczbę kardynalną $< \aleph_1$, zaś M—odpowiedni zbiór. Zbiór M byłby więc równej mocy z pewną częścią H zbioru G wszystkich liczb porządkowych klasy II-giej. Jeżeli dla elementów zbioru H pozostawimy uporządkowanie według wielkości, to zbiór H będzie, jak wiemy, dobrze uporządkowany. W myśl twierdzenia z art. 1-go, zbiór H będzie podobny albo zbiorowi G, albo też pewnemu odcinkowi tego zbioru (gdyż zbiór G nie może być podobny żadnemu odcinkowi swej części H). Ale gdyby zbiory G i H były podobne, to byłyby równej mocy, skąd $M \sim G$, oraz $\mathfrak{m} = \aleph_1$, wbrew założeniu. Jest więc zbiór H podobny pewnemu odcinkowi A zbioru G. Niech α oznacza element zbioru G, przez który został utworzony odcinek A; będzie oczywiście α pewną liczbą porządkową klasy II-giej: zbiór, któremu liczba α odpowiada, jest więc przeliczalny: niech F oznacza ten zbiór. Każda liczba porządkowa $\beta < \alpha$ będzie odpowiadała zbiorowi, który jest podobny pewnemu i przytem jednemu tylko odcinkowi B zbioru F: wyznaczy ona zatem określony w zupełności element b, przez który odcinek B został utworzony. Różnym liczbom β będą przytem odpowiadały różne elementy b. Stąd wniosek, że zbiór A wszystkich liczb porządkowych klasy II-giej, mniejszych od α, jest równej mocy z pewną częścią zbioru F, że zatem liczba kardynalna zbioru A jest nie większa od liczby kardynalnej zbioru F, który jest przeliczalny. Jest więc zbiór A skończony albo przeliczalny, a że $M \sim H \sim A$, więc stąd wniosek, iż liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest albo skończona, albo równa liczbie $\aleph_0$. Dowiedliśmy zatem, że między liczbami kardynalnemi $\aleph_0$ i $\aleph_1$ niema żadnej pośredniej.

Błędem byłoby jednak wysnuwać stąd wniosek, że $\aleph_1$ jest najmniejszą z liczb kardynalnych, odpowiadających zbiorom nieprzeliczalnym: aby to twierdzić, należałoby wprzód dowieść, że każda liczba kar-

dynalna da się co do wielkości porównać z liczbą $\aleph_1$ (t. j. połączyć z nią znakiem $>$, $=$ lub $<$).

Udowodnimy tu tylko, że liczba $\mathfrak{c}$ daje się porównać z liczbą $\aleph_1$, że mianowicie:

$$\aleph_1 \leqslant \mathfrak{c}.$$

W art. 6-ym Rozdz. V-go dowiedliśmy, że zbiór G wszystkich typów porządkowych przeliczalnych jest mocy continuum. Zbiór wszystkich typów dobrze uporządkowanych przeliczalnych — a więc też i zbiór wszystkich liczb klasy II-giej — jako część zbioru G, jest mocy $\leqslant \mathfrak{c}$. Stąd nierówność, o dowód której chodzi.

Rzeczą pierwszorzędnej wagi byłoby wiedzieć, czy mamy

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}, \quad \text{czy też } \aleph_1 < \mathfrak{c}.$$

Pytania tego dotąd jednak nie rozstrzygnięto.

6. Liczby porządkowe, odpowiadające zbiorom mocy $\aleph_1$, nazywamy liczbami klasy III-ciej: pierwszą liczbę tej klasy oznaczamy symbolem Ω. Nierówność

$$\alpha < \Omega$$

jest równoważna orzeczeniu, że α jest liczbą klasy I-szej lub II-ej, podobnie jak nierówność

$$\alpha < \omega$$

jest równoważna orzeczeniu, że α jest liczbą porządkową skończoną.

Powiadam, że Ω jest liczbą porządkową, odpowiadającą zbiorowi wszystkich liczb klasy II-giej, uporządkowanemu według wielkości. W samej rzeczy, zbiór G wszystkich liczb klasy II-giej, jak wogóle każdy zbiór liczb porządkowych, uporządkowanych według wielkości, jest zbiorem dobrze uporządkowanym: niech φ będzie liczbą porządkową, która mu odpowiada. Liczba φ jest liczbą klasy III-ciej, gdyż zbiór G jest mocy $\aleph_1$. Jest więc $\varphi \geqslant \Omega$, gdyż Ω jest pierwszą liczbą klasy III-ej. Załóżmy, że $\varphi > \Omega$: byłby więc zbiór H, odpowiadający liczbie Ω, podobny pewnemu odcinkowi zbioru G. Dowiedliśmy wyżej, że każdy odcinek zbioru liczb klasy II-giej jest skończony albo przeliczalny: wynikałoby stąd, że zbiór H jest skończony albo przeliczalny, wbrew temu, że liczba Ω jest już liczbą klasy III-ciej. Musi więc być $\varphi = \Omega$, c. b. d. o.

Liczba Ω jest liczbą 2-go rodzaju, to znaczy, nie posiada swego poprzednika. Wynika to stąd, że w klasie II-giej niema liczby ostatniej (bo jeżeli α jest liczbą klasy II-giej, to $\alpha + 1$ też jest liczbą tej klasy). Godnem uwagi jest jednak, że nie istnieje taki ciąg nieskończony liczb

porządkowych rosnących φ_n, dla którego liczba Ω byłaby granicą. W samej rzeczy: wszystkie wyrazy takiego ciągu musiałyby być $< \Omega$, a więc należeć do klasy II-giej, a jak wiemy, granica każdego ciągu liczb klasy II-giej jest znowu liczbą klasy II-giej.

O zbiorze wszystkich liczb II-giej klasy możemy więc powiedzieć, że jest zamknięty, ale nie posiada ostatniego elementu.

Oznaczmy przez X zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówności

$$0 \leqslant x < 1,$$

uporządkowany według wielkości. Weźmy pod rozwagę zbiór uporządkowany

$$U = X . \Omega .$$

Opierając się na definicyi continuum liniowego, możnaby z łatwością dowieść, że jeżeli a oznacza jakikolwiek element zbioru U, to zbiór U_1 wszystkich elementów zbioru U, nie późniejszych od a, jest continuum liniowem. Sam zbiór U jednak nie jest continuum liniowem (gdyż nie posiada części wszędziegęstej, przeliczalnej).

Zauważymy jeszcze, że o zbiorze uporządkowanym

$$U + {}^*U$$

możnaby dowieść, iż jest zamknięty i wszędziegęsty, ale nie jest ciągły. Lukę (jedyną) daje w nim przekrój $[U, {}^*U]$.

Jeżeli lukę tę uzupełnimy elementem a, który uważać będziemy jako późniejszy od każdego elementu zbioru U, ale wcześniejszy od każdego elementu zbioru ${}^*U$, to otrzymamy zbiór, który jest ciągły ale nie jest doskonały (gdyż element a nie będzie granicą żadnego ciągu podstawowego).

7. Niech G oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany, a — jakikolwiek dany element tego zbioru. Element a wyznacza pewien odcinek A zbioru G, a więc też pewną, odpowiadającą temu odcinkowi liczbę porządkową α, mniejszą od liczby porządkowej γ, odpowiadającej samemu zbiorowi G. (Wyjątek w tym względzie stanowi jedynie element pierwszy zbioru G, któremu nie odpowiada żaden odcinek, a więc też żadna liczba porządkowa: podporządkujemy wobec tego symbol 0 pierwszemu elementowi zbioru G). Ale i naodwrót, jeżeli α oznacza jakąkolwiek liczbę porządkową $< \gamma$, to istnieje jeden i przytem jeden tylko odcinek A zbioru G, któremu odpowiada liczba porządkowa α.

Istnieje więc odpowiedniość doskonała między wszystkiemi elementami zbioru G (z wyjątkiem pierwszego), a wszystkiemi liczbami

porządkowemi $\alpha < \gamma$. Wobec tego liczb porządkowych możemy używać jako **wskaźników** do oznaczania elementów zbioru dobrze uporządkowanego. Mając wskaźnik, będziemy zarazem wiedzieli, jakie **miejsce** zajmuje dany element w uważanym zbiorze.

Więc, jako wskaźnik pierwszego elementu danego zbioru przyjmujemy liczbę 0: dalsze elementy oznaczamy kolejno wskaźnikami 1, 2, 3, . . . Po wszystkich elementach o wskaźnikach skończonych następuje element o wskaźniku ω, dalej kolejno elementy o wskaźnikach $\omega + 1$, $\omega + 2$ i t. d.; po nich wszystkich element o wskaźniku $\omega . 2$ i t. d., i t. d.

Wyjaśnimy to jeszcze na przykładach.

Weźmy pod rozwagę zbiór wszystkich liczb rzeczywistych formy

$$k - \frac{1}{n},$$

gdzie k i n są dwie liczby naturalne, i zbiór ten uporządkujmy według wielkości. Będziemy tu więc mieli:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ \text{ogólnie}\ a_m = 1 - \frac{1}{m+1},$$

przy skończonem m. Dalej będzie:

$$a_\omega = 1,\ a_{\omega+1} = \frac{3}{2},\ a_{\omega+2} = \frac{5}{3},\ \text{ogólnie}\ a_{\omega+m} = 2 - \frac{1}{m+1},$$

przy skończonem m. Czytelnik przekona się z łatwością, że będziemy mieli całkiem ogólnie

$$a_{\omega . p+m} = p + 1 - \frac{1}{m+1},$$

przy całkowitych nieujemnych p i m. W ten sposób zostaną opatrzone wskaźnikami wszystkie elementy naszego zbioru.

Jako drugi przykład weźmiemy zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych, przytoczony w art. 4-ym, jako przykład zbioru typu ω^ω. Będziemy tu mieli:

$a_0 = (1),\ a_1 = (2),\ a_2 = (3),\ a_3 = (4), \ldots$
$a_\omega = (1, 1),\ a_{\omega+1} = (1, 2),\ a_{\omega+2} = (1, 3), \ldots$
$a_{\omega . 2} = (2, 1),\ a_{\omega . 3} = (3, 1),\ a_{\omega . 4} = (4, 1), \ldots$
$a_{\omega^2} = (1, 1, 1),\ a_{\omega^2 . 2} = (2, 1, 1),\ a_{\omega^2 . 3} = (3, 1, 1), \ldots$
$a_{\omega^3} = (1, 1, 1, 1),\ a_{\omega^4} = (1, 1, 1, 1, 1),\ a_{\omega^5} = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \ldots$
i t. d., np.

$$a_{\omega^5 . 3+\omega^3 . 4+\omega . 5+8} = (3, 1, 5, 1, 6, 9),$$

ogólnie:

$$a_{\omega^p \cdot n_0 + \omega^{p-1} n_1 + \ldots + \omega \cdot n_{p-1} + n_p} = (n_0, n_1 + 1, \ldots, n_{p-1} + 1, n_p + 1),$$

jak to czytelnik z łatwością udowodni.

8. Damy teraz jeszcze pewien ogólniejszy przykład używania liczb pozaskończonych porządkowych jako wskaźników.

W art. 8-ym Rozdz. VII-go wprowadziliśmy pojęcie pochodnych rzędów wyższych dla danego zbioru punktów. Załóżmy, że dla danego zbioru punktów P określiliśmy już pochodne o wszystkich wskaźnikach porządkowych, mniejszych od liczby porządkowej α. (Tak np. dla $\alpha = 2$, określiliśmy już pochodną P'). Aby teraz dać definicyę pochodnej $P^{(\alpha)}$, rozróżnimy dwa przypadki:

1) Liczba porządkowa α jest liczbą pierwszego rodzaju. Istnieje więc liczba bezpośrednio ją poprzedzająca, którą oznaczamy przez $\alpha-1$. Otóż jako pochodną rzędu α zbioru P uważamy w tym razie pierwszą pochodną zbioru $Q = P^{(\alpha-1)}$. (Kładziemy więc $P^{(\alpha)} = Q'$).

2) Liczba porządkowa α jest liczbą drugiego rodzaju. W tym przypadku przez $P^{(\alpha)}$ rozumiemy zbiór tych wszystkich punktów, które należą jednocześnie do każdego ze zbiorów $P^{(\beta)}$, gdzie $\beta < \alpha$. I w tym przypadku zbiór $P^{(\alpha)}$ jest w zupełności oznaczony, gdyż, jak zakładamy, każdy ze zbiorów $P^{(\beta)}$, dla $\beta < \alpha$, jest już określony.

Powiadam, że przez umowy powyższe jest określona pochodna $P^{(\alpha)}$ dla każdego (skończonego lub pozaskończonego) wskaźnika: dla dowodu wystarczy się tylko powołać na zasadę indukcyi pozaskończonej (Rozdz. III, art. 13).

Dawniej dowodzono większości twierdzeń Teoryi mnogości punktowych, operując pochodnemi rzędów pozaskończonych: chęć udowodnienia tych twierdzeń była nawet dla Cantora głównym bodźcem do stworzenia całej teoryi liczb porządkowych pozaskończonych. Dziś dla wszystkich tych twierdzeń znaleziono już dowody prostsze, nie posługujące się liczbami pozaskończonemi (niektóre znalazł później nawet sam Cantor, jak np. dla twierdzenia, że mnogość doskonała ma moc continuum). Z ciekawszych twierdzeń o pochodnych rzędu pozaskończonego wymienimy następujące:

Na to aby pochodna P' danego zbioru była przeliczalna, potrzeba i wystarcza, iżby zbiór P^{Ω} był pusty.

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY.

Alef (liczba kardynalna $\aleph$), 151 [1])
Algebraiczne liczby, 25.
Analysis Situs, patrz Topologia.
Antynomia (Richarda), 11.
Apantachiczny zbiór, 121.
Asymetryczna względność, 33.

Bernsteina twierdzenie, 81.
Bolzano-Weierstrassa, tw. 92.
Borela miara zbioru, 136.
" twierdzenie, 131.

Cantora liczby, 141.
" miara zbioru, 132.
Ciągłość funkcyi, 52, 95
" zbioru, 44.
Continuum liniowe, 48.
" m-wymiarowe, 93.
" -moc 61.
" -problemat, 77.
Część (właściwa) zbioru, 7.
" wszędziegęsta, 45.

Dedekinda przekroje, 43.
Dobrze uporządkowany zbiór, 58, 138.
Dopełniający zbiór, 100.
Doskonały zbiór, 43.
Dzielnik wspólny zbiorów, 128.

Funkcya (ciągła) elementów zbioru, 52, 95.
Funkcya odwracalna, 96.

Gatunki mnogości, 130.
Gęsty w sobie zbiór. 43; — wszędzie: patrz wszędziegęsty.
Główny element zbioru, patrz graniczny.
Granica ciągu (rosnącego) 42, (malejącego) 43, (punktów) 90.
Graniczny element zbioru uporządkowanego, 43.
Graniczny punkt mnogości m-wymiarowej, 91.

Hankela miara zbioru, 132.
Heinego (-Borela) twierdzenie, 131.
Hilberta krzywa, 107.
" pewniki, 65.

Iloczyn liczb kardynalnych, 62, 67.
" " porządkowych, 143.
" logiczny (względności), 35.
" typów porządkowych, 55.
" względny, 34.
" zbiorów, 62, 67.
Indukcya pozaskończona, 57.

Jedno-jednoznaczna odpowiedniość, 5.
Jordana krzywe, 105.
" miara zbioru, 136.

Kardynalne liczby, 4.
Kategorye zbiorów, 125.
Klasy liczb porządkowych, 142.
Kondensacyi miejsce, 112.
Königa symbole, 63.
Krzywa Hilberta, 107.
" Jordana, 105.
" Peano, 106.

Lebesgue'a miara zbioru, 136.
Liczby Cantora (porządkowe), 141.
" I-szej i II-ej klasy, 142.
" III-ciej klasy, 153.

[1]) Liczby oznaczają stronice.

Liczby kardynalne, 4.
„ Liouville'a, 121.
„ porządkowe, patrz Cantora.
Liouville'a liczby, 121.
Luka, 44.

Malejący ciąg, 43.
Miara zbioru, 132, 136.
Miejsce (skupienia i t. p.), patrz punkt.
Mierzalny zbiór, 136.
Mnogość, 1; patrz zbiór.
Moc (zbioru) 3, 5; — continuum, 61.

Nadskończone liczby, 4.
Negacya względności, 34.
Nieprzeliczalny zbiór, 20.
Nierozciągły zbiór, 133
Niesymetryczna względność, 32.
Nigdziegęsty zbiór, 121.

Obraz geometryczny funkcyi, 107.
„ zbioru, 95.
Odcinek zbioru dobrze uporządkowanego, 138.
Odliczalny, patrz przeliczalny.
Odosobniony punkt, 91.
„ zbiór, 111.
Odpowiedniość (doskonała, jedno-jednoznaczna), 5.
Odwracalna funkcya, 96.
Odwrócenie względności, 33
Odwzorowanie zbioru, 95.
„ podobne, 138.
Ograniczenia punkty, 101.
Ostatni element zbioru, 40.

Pantachia, 40.
Pantachiczny, patrz wszędziegęsty.
Peano'a krzywa, 106.
„ miara zbioru, 136.
Pierwszy element zbioru, 30.
Pochodna zbioru, 127.
Podobne zbiory, 39
Podstawowe ciągi, 43.
Porządkowe liczby, 141.
Potęga liczb kardynalnych, 70.
Pozaskończona liczba, 4.
„ indukcya, 57.
Problemat continuum, 77.
„ trychotomii, 73, 82.
Przechodnia względność, 33.
Przekątnych metoda, 22
Przekroje Dedekinda, 43.
Przeliczalne zbiory, 13.
Przestępne liczby, 26.
Punkt graniczny, 91.
„ kondensacyi, 112.
„ odosobniony, 91.
„ przestrzeni m-wymiarowej, 97.
„ skupienia, 90, 109.

Richarda antynomia, 11.
Rodzaje liczb porządkowych, 145.
„ mnogości, patrz gatunki.
Rosnący ciąg, 42.
Równej mocy zbiory, 5.
Różnica zbiorów, 46.

Skok, 43.
Skupienia miejsce, punkt, 90, 109.
Spójny zbiór, 93, 130.
Stosunek, patrz względność.
Suma liczb kardynalnych, 14, 21.
„ logiczna względności, 55.
„ typów porządkowych, 53.
„ zbiorów, 14, 21.
Symetryczna względność, 32.

Topologia, 105.
Typy porządkowe, 39.

Uporządkowany zbiór, 37.

Wewnętrzna miara zbioru, 136.
Wewnętrzny punkt, 101.
W sobie gęsty (zbiór), 43.
Wszędziegęsta część zbioru, 45.
Wzędziegęsty zbiór, 40.
Względność, 32,

Zagęszczenie, patrz kondensacya.
Zamknięty zbiór, 43, 93.
Zbieżny ciąg, 90.
Zbiór (pojęcie zbioru), 2.
„ apantachiczny, 121.
„ ciągły, 44.
„ dobrze uporządkowany, 58, 138.
„ dopełniający, 100.
„ doskonały, 43.
„ drugiej kategoryi, 125.
„ mierzalny, 136
„ mocy continuum, 61.
„ nieprzeliczalny, 20.
„ nierozciągły, 133.
„ nigdziegęsty, 121.
„ odosobniony, 111.
„ ograniczony, 40, 91, 111.
„ pierwszej kategoryi, 125.
„ pochodny, 127.
„ podobny, 39.
„ przeliczalny, 13.
„ równej mocy, 5.
„ spójny, 93, 130.
„ uporządkowany, 37.
„ w sobie gęsty, 43.
„ wszędziegęsty, 40.
„ zamknięty, 43, 93.
Zewnętrzna miara zbioru, 136.
Zewnętrzny punkt zbioru, 101.



